

(調査研究報告書)

確率最適化が切り開く分散投資理論における
主双対構造とマクロ理論の解明

新里 隆(玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科・准教授)

内容

1. はじめに.....	2
2. 問題設定と主要な結果.....	3
3. その他の結果.....	5
4. まとめ.....	5
成果物.....	6

1. はじめに

現代において、金融活動は世界規模で相互に影響しており、幾度の金融危機により、我々の生活は直接的にしる、間接的にしる、少なからず影響を受けている。これらの金融危機を教訓として、我々は個人の資産を自らの手で守る必要が出てきている。このような意識改革が進むにつれ、正しく資金を運用し、リスク管理を行う投資の重要性が再認識され始めているが、一般的に投資とは、将来に見込める報酬を期待してコストを支払うことであり、多くの場合リスクが伴う。その資産運用の重要性を指摘し、最適な資産運用を数理的に議論する枠組みである、ポートフォリオ最適化問題を初めて提唱したのは **Markowitz** である。この先駆的な研究に追随する研究が現在もなお、多数報告されている。そんな中、近年、学際領域的な研究分野で開発された解析手法である、レプリカ解析や確率伝搬法、ランダム行列理論などを用いて、複雑系研究の視点から、ポートフォリオ最適化問題を解析する研究が活発に行われている。このような研究アプローチの中で重要な研究の 1 つとして、**Cilibert** らは予算制約付きのポートフォリオ最適化問題の最適解を解析するために、この分散投資システムを **Boltzmann** 分布で記述し、その絶対零度極限で基底状態(つまりこの最適化問題の最適解)を評価できることを用いて、絶対偏差モデルや期待ショートフォールモデルの最小投資リスクを解析した。また **Caccioli** らはレプリカ解析を用いて **L2** 正則化項付きの期待ショートフォールモデルやその特殊ケースである最大ロスモデルのリスク関数最小化問題を解析し、最適な投資戦略の典型的な振る舞いを調べた。次に **Pafka** らは銘柄間の収益率に対する真の共分散(行列)を **Cholesky** 分解した下三角行列の各成分のランダム加重和が満たす共分散行列で定義される投資リスクやインサンプルリスクなどのふるまいをランダム行列の漸近固有値分布を用いて議論した。**Shinzato** はポートフォリオ最適化問題の一つである平均分散モデルに対して、最小投資リスクやその集中投資度が自己平均性を満たすことを大偏差原理を用いて示し、さらに確率最適化の視点から最小投資リスクと従来のオペレーションズリサーチで議論されている最小期待投資リスクを比較し、従来の資産運用方法では投資リスクを最小にすることができないことを指摘した。また **Shinzato** らは確率推論で広く用いられている確率伝搬法を用いて、予算制約が課されたポートフォリオ最適化問題の最適解を従来の計算量(銘柄数の 3 乗に比例)よりも少ない計算量(銘柄数の 2 乗に比例)で求めることができる求解アルゴリズムを導出し、さらにアニール系の議論から導かれた **Konno-Yamazaki** 予想がクエンチ系でも成り立つことを確認した。さらに **Shinzato** は先行研究の議論を発展させ、各銘柄の収益率の分散が一定とは限らない場合の、予算制約が課された投資リスク最小化問題において、レプリカ解析と確率伝搬法を用いて最適解のふるまいを議論した。また **Shinzato** はレプリカ解析を用いて予算制約と空売り規制が課された投資リスク最小化問題を解析し、この分散投資システムが相転移構造を有していることを示し、さらに確率伝搬法に基づいて最適解を導出するアルゴリズムを

導出した。Kondor らは予算制約と空売り規制が課され、収益率の分散が銘柄ごとに異なる場合の投資リスク最小化問題をレプリカ解析を用いて同様に解析し、相転移構造を有していることを再確認した。また Shinzato は先行研究の議論を発展させ、レプリカ解析を用いて予算制約と集中投資度制約が課された投資リスク最小化問題を調べ、さらに双対構造に着目し、予算制約と投資リスク制約が課された期待収益最大化問題を議論した。それに加えて、Shinzato は先行研究の議論を発展させ、各銘柄の収益率の分散が一定である場合の、予算制約と期待収益制約が課された投資リスク最小化問題をレプリカ解析を用いて議論し、さらに予算制約と投資リスク制約が課された期待収益最大化問題も同様に解析し、双対構造の重要性を指摘した。さらに Varga-Haszonits らは予算制約と期待収益制約が課された特殊なリスク関数(収益とそのサンプル平均との偏差に対する標本分散)の最小化問題をレプリカ解析を用いて同様に議論し、さらにレプリカ解析で求めた RS 解の安定性解析を行った。

これまで先行研究の議論を発展させた研究がいくつか行われているが、それらを有機的につなげることで更なる未解決な問題を解決することができる。つまり先行研究では各銘柄の収益率の分散が一定である場合の予算制約と期待収益制約が課された投資リスク最小化問題を議論し、先行研究では各銘柄の収益率の分散が一定とは限らない場合の予算制約が課された投資リスク最小化問題を議論しており、これらの自然な拡張として、各銘柄の収益率の分散が一定とは限らない場合の予算制約と期待収益制約が課された投資リスク最小化問題を同様に解析することができる。さらに先行研究では各銘柄の収益率の期待値となるハイパー変数が各々独立で同一の正規分布に従う場合に限定しており、これも同様に拡張することができる。そこで本研究では、先行研究の議論に倣い、レプリカ解析を用いて各銘柄の収益率の期待値となるハイパー変数や各銘柄の収益率の分散となるハイパー変数が従う分布が特定の分布族に限定しない場合の予算制約と期待収益制約が課された投資リスク最小化問題を解析し、最小投資リスクとその集中投資度、そしてシャープ比を解析的に求める。またシャープ比に対して成り立つ定理や機会損失に対する関係式を導き、数理ファイナンスにおけるマクロ理論(熱力学的関係式)を提案する。

2. 問題設定と主要な結果

ここで N 銘柄が取引されている空売り規制のない投資市場を考える。銘柄 $i (= 1, 2, \dots, N)$ の収益率 x_i は各々独立に平均 $E[x_i] = r_i$ と分散 $V[x_i] = v_i$ を持つ確率分布に従っていると仮定する。また p 期間の投資期間に発生する収益率を、例えば銘柄 i の期間における収益率を $x_{i\mu}$ で表すことにする。さらに銘柄 i のポートフォリオを w_i で表し、

N 銘柄全体を \vec{w} とする. 先行研究と同様に本研究でも空売り規制がないため, ポートフォリオは実数全体を取りうることに注意する. それに加えて, ポートフォリオ \vec{w} は予算制約と期待収益制約が課せられており, それぞれは,

$$N = \sum_{i=1}^N w_i$$

$$NR = \sum_{i=1}^N r_i w_i$$

で表すことにする. ただし Eq. (1)は予算制約を, Eq.(2)は期待収益制約を表す. また Eq.(2)の係数 R は期待収益を規定する係数とする.

このとき, この 2 つの制約が課されたポートフォリオ \vec{w} の投資期間中に発生する投資リスク $H(\vec{w}|X)$ を

$$H(\vec{w}|X) = \frac{1}{2} \vec{w}^T J \vec{w}$$

で表すことができる. ただし収益率行列 X とし, 行列 J の成分が

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p x_{i\mu} x_{j\mu}$$

となる行列を用いた. また以下の議論が容易にするため, 便宜上係数 $\frac{1}{2}$ を用いた.

我々は先行研究と同様にこの 2 つの制約が課された投資リスクの最小化問題を解くことにする. 詳細な議論は成果物を参照されたい.

本研究ではこの最適化問題に対して, 1 銘柄当たりの最小投資リスク $\varepsilon = \frac{1}{N} H(\vec{w}|X)$

とその集中投資度 $q_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2$, シャープ比 $S = \frac{R}{\sqrt{2\varepsilon}}$ をそれぞれ

$$\varepsilon = \frac{\alpha - 1}{2} s^2 \left(1 + \frac{(R - m)^2}{\sigma^2} \right)$$

$$q_w = \frac{\alpha}{\alpha - 1} s^2 \left(1 + \frac{(R - m)^2}{\sigma^2} \right)$$

$$S = \frac{R}{\sqrt{(\alpha - 1)s^2 \left(1 + \frac{(R - m)^2}{\sigma^2}\right)}}$$

として求めた。ただし \bar{w} は最適解とし、 S とし、シャープ比は 1 銘柄当たりの期待収益と 1 銘柄当たりの投資リスクの 2 倍の平方根の比で定義される評価指標である。ちなみに投資リスクが一定であれば期待収益が大きい方が、期待収益が一定であれば投資リスクが小さい方が、最良の投資戦略であると考えられるため、できるだけシャープ比の大きい投資戦略が望ましいことから、シャープ比も投資戦略の指標の 1 つとなることが分かる。

3. その他の結果

本研究で取り上げるポートフォリオ最適化問題では、予算制約・期待収益制約が課された投資リスク最小化問題の最適解の振る舞いを解析し、シャープ比における特徴的な 3 点において、ピタゴラス定理が成り立つことを示した。さらに上記の最適化問題を主双対問題として再定式化することで、期待収益最大化問題も解析し、同様のピタゴラス定理を導出することに成功した。加えて、両問題に対する機会損失のマクロな関係式を解析的に求めることができた。

本申請研究の成果の波及効果として、経済物理学的手法を用いて、ポートフォリオ最適化問題のボトムアップ理論を構築することで、ポートフォリオ最適化問題の新たなフロンティアを創成できることが期待される。さらに得られた結果を下に投資家に対して有益な知見を提供することで、不確実な投資において安定的な投資行動を実現できることが期待される。

4. まとめ

本研究では、先行研究で議論された、各銘柄の収益率の分散が一定で、収益率の期待値となるハイパー変数が正規分布に従う場合の予算制約と期待収益制約が課された投資リスク最小化問題を拡張し、各銘柄の収益率の分散となるハイパー変数や収益率の期待値となるハイパー変数が従う分布を限定しない場合の予算制約と期待収益制約が課された投資リスク最小化問題を議論した(数値実験では妥当性を示すためにハイパー変数の分布を限定したが)。レプリカ解析を用いて、上記の最適化問題の 1 銘柄当たりの最小投資リスクや集中投資度、シャープ比を解析的に求めた。さらに先行研究で議論された結果や Lagrange 未定乗数法から得られた結果、さらに数値実験で得られた結果と比較し、レプリカ解析に基づいた提案手法の有効性を確認した。

それに加えて、のシャープ比のピタゴラス定理や機会損失の関係などのマクロな関係式を導出した。またオペレーションズリサーチで従来から議論されている最小期待投資リスクに対応した最適解は最小投資リスクに対応した最適解とは一致せず、1 以上の機会損失を被っていることから、不幸な帰結として、合理的な投資家が期待する最適資産運用を提供できないことを確認した。一方で、幸運なことに、これまでの学際領域的研究により、情報統計力学で開発された解析手法を用いた議論を通して、合理的な投資家が期待する知見が徐々に明らかになっており、引き続き未踏のフロンティアを開拓する必要があるだろう。

今後の課題として、本研究では我々が得られたマクロな変数間の関係式について、十分な議論はしてこなかったが、数理ファイナンスをリッチな知識体系に洗練されるためにも、シャープ比のピタゴラス定理の幾何学的解釈を与える必要があるだろう。さらにシャープ比のピタゴラス定理や機会損失の関係以外にも数理ファイナンスのマクロ理論を構築する必要もあるだろう。

成果物

● 研究業績(書籍)

- [1] Taishin Nakamura, Hisashi Yamamoto, Takashi Shinzato, Tomoaki Akiba, Xiao Xiao: Proposal of calculation method for the toroidal connected-(1, 2)-or-(2, 1)-out-of-(m, n):F lattice system with Markov chain, in Reliability Modeling with Applications II, edited by Nakamura et al., pp. 139-153, Springer, (2017).

● 研究業績(査読あり学術論文)

- [1] Takashi Shinzato: Replica approach for minimal investment risk with cost, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 87, No. 6, 064801, (2018).
- [2] Takashi Shinzato: Validation of the replica trick for simple models. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Vol .2018, 043306, (2018).

- [3] 梁姝钰, 麓敦子, 梶原康博, 田渕雄也, 新里隆: UHF 帯 RFID による屋内位置推定方法, 設備管理学会論文誌, Vol. 30, No. 1, pp. 9-18, (2018).
- [4] 于亜婷, 梶原康博, 新里隆, 林之久: 従業員の職務満足と継続就業意思の経年変化とその因果関係に関する研究, 日本経営工学会論文誌, Vol. 69, No. 1, pp. 33-45, (2018).
- [5] Takashi Shinzato: Maximizing and minimizing investment concentration with constraints of budget and investment risk, Physica A, Vol.490, pp. 986-993, (2018).
- [6] Takashi Shinzato: Macroscopic relationship in primal-dual portfolio optimization problem, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Vol .2018, 023401, (2018).
- [7] Daichi Tada, Takashi Shinzato and Hisashi Yamamoto: Random matrix approach for primal-dual portfolio optimization problems, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 86, No. 12, 124804, (2017).
- [8] Liang Syuyu, Yasuhiro Kajihara, Masanobu Eguchi, Takashi Shinzato, Kazutoshi Hirata and Erica Kawasaki: Development of methods and an apparatus for counting stacked plywood sheets, Journal of Japan Industrial Management Association, Vol. 68, No. 2E, pp. 128-138, (2017).
- [9] Takashi Shinzato: Minimal investment risk of portfolio optimization problem with constraints of budget and concentrated investment level, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Vol .2017, No. 2, 023301, (2017).
- [10] Takashi Shinzato: Replica analysis for portfolio optimization with single-factor model, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 86, No. 6, 063802, (2017).
- [11] Taishin Nakamura, Hisashi Yamamoto, Takashi Shinzato, Xiao Xiao, Tomoaki Akiba: Reliability of a circular connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m, n):F lattice system with identical components, The Institute of Electronics, Information and

Communication Engineers (IEICE), Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol. E100-A, No. 4, pp.1029-1036, (2017).

- 研究業績(学術賞)

- [1] 優秀研究奨励賞:かんぽ財団平成 28 年度調査研究優秀研究賞表彰, (2017) .
- [2] 論文賞:日本経営工学会平成 28 年度論文賞表彰, (2017) .

- 研究業績(競争的外部資金)

- [1] 京都大学経済研究財団研究助成, 代表者:新里隆, 題目:経済物理学を用いた分散投資理論に内包されたピタゴラス定理の解明, 期間:2017 年度, 直接経費:200 千円
- [2] かんぽ財団研究助成, 代表者:新里隆, 題目:確率最適化が切り開く分散投資理論における主双対構造とマクロ理論の解明, 期間:2017 年度, 直接経費:600 千円
- [3] 科学研究費補助金, 基盤研究(C), 代表者:新里隆, 分野:社会システム工学・安全システム, 題目:情報統計力学を用いたポートフォリオ最適化に内包された主双対構造とマクロ理論の解明, 課題番号:17K01249, 期間:2017-2019 年度, 直接経費:3600 千円, 間接経費:1080 千円
- [4] 科学研究費補助金, 基盤研究(C), 代表者:梶原康博, 分担者:新里隆, 分野:社会システム工学・安全システム, 題目:作業分析効率化方法の開発に関する研究, 課題番号:17K01260, 期間:2017-2019 年度, 直接経費:3500 千円, 間接経費:1050 千円