

(調査研究報告書)

モデル・リスクを考慮したマーケット中立的投資手法の確立

代表研究者氏名 吉川大介(北海学園大学経営学部准教授)¹

1. はじめに

ペアーズ・トレーディングは長い歴史を持つが、さかのぼれば1980年代に活躍したクオンツ・トレーダーであるMorgan StanleyのNunzio Tartagliaのグループによる技術開発がその起源と言われている。このペアーズ・トレーディングは「マーケット中立性」と言われる魅力的な特徴のおかげで、その開発以来大きな発展を遂げてきた。マーケット中立性とは資産価格の安定的な推移を指すものであり、例えば株式市場のボラティリティが大きく、市場全体が大きく変動したときであっても、マーケット中立的な銘柄の株価はその変動から比較的独立であり、安定的に推移すると言われる。そうしたことから、マーケット中立的な取引手法の一つであるペアーズ・トレーディングの本質は、マーケット中立的となるような銘柄のペアを探し出すことにあるとされる。換言すればペアーズ・トレーディングを行おうとすることは、まず平均回帰するような水準をもつペアを見つけ出すことを意味する。なぜなら、平均回帰性が保証されている限り、市場が全体として激しく推移していても、たとえペアが一時的に市場の影響で回帰水準から乖離したとしてもやがて平均回帰水準に回帰することが期待されるからである。

もし、こうした平均回帰水準を見つけ出すことができれば、たとえばペアの一方の銘柄を売ると同時にもう一方の銘柄を買うなどしてペアの価値をいわば一つの証券として保有することにより取引利益を獲得するチャンスを得る。実際、ペアの価値は平均回帰水準の周りを推移するので、もしペアの価値が平均回帰水準から十分離れたときに上記したようにペアの一方の銘柄を購入、もう一方の銘柄を空売りするなどしてポジションをとればよい。そして、ペアの価値が再び平均回帰水準にタッチしたときにポジションを流動化すれば、利益を確定できるのである。もちろん、逆にペアが平均回帰水準にタッチしたときにポジションを組み、ペアの価値が回帰水準を十分離れたときにポジションを流動化することで利益を獲得しても構わない。

さて、このようなペアーズ・トレーディングであるが、これを定量的に実施するためにはトレーディング手法の数学的定式化が必要となる。すなわち、平均回帰性をもつペ

¹ 本報告書の内容は”Pairs trading under model uncertainty”というタイトルのもと Imperial College LondonのMark H.A. Davis氏との共著で2018年9月に開催される Robust Techniques in Quantitative Finance Conferenceにおいて公表予定である。

アーの価値を確率微分方程式で記述しなければならない。その一つの有力な候補は Ornstein-Uhlenbeck 過程 (OU 過程) と言われるもので、Elliott et al. (2005) などではこれを用いてペアーの価値に数学的定式化を与えている。他にも OU 過程にジャンプを加えたもの (Larsson et al. (2013)) などもある。いずれにせよ、いったんペアーの価値に確率過程をあてはめたら、それに応じて平均回帰水準もまた与えられる。ただし、それだけでは不十分である。ペアーズ・トレーディングの実施にあたっては、平均回帰水準からもっとも乖離するポイントを見つけることも必要だからである。実際、単に平均回帰水準がわかっているだけでは、いつペアーのポジションを組む(あるいは解消する)べきか定量的な判断ができない。期待される利益を最大にするためにはペアーの価値が平均回帰水準をもっとも離れたときを知り、そのタイミングを狙ってペアーズ・トレーディングを実施することが望ましいのである。そこで、ペアーの価値が平均回帰水準からもっとも離れたタイミングを知るための数学的定式化もまた必要となる。これには通常最適停止問題と呼ばれる定式化が用いられることが多い。本研究でもこの枠組みで問題を考えることとした。

以上が標準的なペアーズ・トレーディングのあらましになる。しかし、仮に平均回帰水準とそこからもっとも乖離した点を見つけても、なお問題は残る。実際、平均回帰水準にせよそこからの乖離ポイントにせよ、ある特定の確率過程モデルとそのモデルを特徴づけるパラメータを特定の統計手法にしたがって推定することに基づいているわけだが、それゆえもしモデル・パラメータを誤って特定してしまったら、ペアーズ・トレーディングによってかえって大きな損失を生み出してしまいかねない。こうした可能性を「モデルの不確実性」あるいは単に「モデル・リスク」と呼ぶ。

こうしたモデルの不確実性を回避するもっとも単純な方法はロスカットである。これは Ekström et al. (2011) らが主張している方法だが、単純で直観に訴えかけるため投資家にしばしば用いられるロスカットは非常に説得力がある。しかし他方で、どの水準までロスが膨らんだらカットすべきかについては特別なルールがあるわけではなく、手法としてはアドホックと言わざるを得ない。こうした欠点を補うべく、Yoshikawa (2017) はモデルの不確実性をペアーズ・トレーディングの最適化問題に内製化することを主張した。具体的には、相対エントロピーと呼ばれる尺度を用いてモデル・パラメータの特定に伴う誤差の度合いを測り、これをペナルティ関数としてペアーズ・トレーディングから得られるであろう期待収益から差し引くことで最適化問題の目的関数を再定式化することを主張した。そのうえで、最適化問題を解けば、得られた解(これは平均回帰水準からもっとも乖離したポイントである)はあらかじめモデルの不確実性を考慮したものとなっているのである。

ただし、Yoshikawa (2017) はペアーズ・トレーディングの終了時点を特定しないでこの問題に取り組んでいる。つまり、最悪の場合、いつまでたってもペアーの価値が最大値に達せず、投資収益を確定できない期間が続くことも許容しているのである。特段、取引期間を定めない個人投資家であれば、このような問題設定も問題ないだろう。しかし、もしわれわれが想定する投資家が定期的に投資成績を報告しなければならない

い経済主体(たとえば保険や年金基金のファンド・マネージャー)であれば、取引期間
はあらかじめ定義しておく必要がある。その意味で、有限期間かつモデルの不確実性
を考慮したペアーズ・トレーディングの最適解は非常に重要な意味をもつ。本研究は
こうした問題に取り組み、そして解を提示するものである。

以上のような意図のもと本研究は遂行されたのだが、本報告書は以下のような構成
を持つ。2節では本研究で用いるいくつかの仮定を紹介すると同時に、モデルの不確
実性を考慮しない、標準的な設定のもとでペアーズ・トレーディングの最適解、つまり
平均回帰水準からの最乖離ポイントを導き出す。次に3節でモデルの不確実性を考
慮した平均回帰水準からの最乖離ポイントを導き出す。4節ではこうした結果を実際の
市場データを用いて数値例として示す。最後の節で結論を述べる。また、主要な結果
の証明や数値計算に用いた若干テクニカルな事項などはすべて付録に記述すること
とした。

2. モデル

先述した通り、本研究の実施にあたっては適切に選ばれたペアの価値に数学的定
式化を与えなければならない。そこで、この節では基本的な設定の紹介を行い、その
うえでモデル・リスクを勘案しない場合のペアーズ・トレーディングの最適戦略の導出を
行う。これはモデル・リスクを勘案した場合のペアーズ・トレーディングを考察する上で
ベンチマークとなるものである。

最初に確率空間を定義する。ここで確率空間は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$ で与えられることとす
る。確率空間に含まれる Ω は標本集合である。また $\mathcal{F}$ は標本集合 Ω から生成される σ -加
法族であり、 $\mathbf{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ はフィルトレーションである。フィルトレーションに含まれる
 $\mathcal{F}_0$ は自明な σ -加法族とし、 $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ を仮定する。最後に P は確率測度である。

ペアーズ・トレーディングの本質は二つの銘柄を組み合わせた価値が推移する確
率過程の平均回帰性を用いることである。ジャンプを含んだ複雑な確率過程を考える
こともできるが、数学的には可能な限り単純なモデルを用いることでより直観的かつ説
得力の強い議論を展開したい。そこで、Elliott et al. (2005) にならって、我々も
Ornstein-Uhlenbeck 過程 $\hat{X}_t$ を考えることとする。これは平均回帰性をもつ確率微分
方程式としてはもっともシンプルなもののひとつである。Ornstein-Uhlenbeck過程の具
体的な形式は以下で定義される。

$$d\hat{X}_t = -\alpha(\hat{X}_t - \mu)dt + \sigma dW_t, \hat{X}_0 = \mu + x,$$

ここで α, σ, x は正の定数であり、 μ は平均回帰水準を意味する。さらに、 W_t は P -ブ
ラウン運動とする。また、簡単のため、 $X_t := \hat{X}_t - \mu$ を定義する。このとき、以下が成り
立つ。

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, X_0 = x. \quad (1)$$

この X_t という確率過程は平均回帰水準が0で与えられることとなるので、0から X_t がもつとも離れるポイントを見つけ出すことが目標となる。単純な操作ではあるが、回帰水準をゼロに標準化することで数学的に煩雑な処理から解放され、議論の見通しはよくなる。もちろん、得られた結果に μ を加算してやることで、本来の結果を逆算することができる。

このように確率微分方程式を調整したうえで、このペアーの価値 X_t が最大値になる点を見つけることで、投資家はペアー・トレーディングの具体的戦略を構築できる。すなわち、以下の最適停止問題を考えることがとりもなおさずペアーズ・トレーディングの解を与えることとなる。

$$v^0(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} E[e^{-\rho(\tau-t)} X_\tau^{t,x}], (t, x) \in [0, T] \times R \quad (2)$$

ここで、 $\mathcal{T}_{t,T}$ は $[0, T]$ における停止時刻の集合である。また、 ρ は割引率、 $\{X_\tau^{t,x}, \tau \geq t\}$ は時刻 t で x を初期値として確率過程 X_t が出発することを条件とする、確率微分方程式 (1)の解である。また、我々はすべての $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$ に対して $E\tau < \infty$ を仮定する。

ここで改めて問題 (2) の解の経済学的意味を明らかにしよう。ペアーの価値 X が問題(2)の解で特定されるあるポイントに到達したとき、ペアーの価値は期待値の意味で最大化されている。そこで、ペアーが含む銘柄をショートし、ペアーの価値 X が0に達した時、ポジションを解消することで利益を確定する。もちろん、逆にペアーの価値 X がゼロのときペアーをロングし、 X が最大値に到達した時にポジションを流動化し利益を確定してもよい。いずれにせよ、上記二つの戦略を問題(2)の解は示唆しているので、いったん解が得られたら投資家がペアーズ・トレーディングの戦略を実施するのは容易である。

それではどのようにして上記の最適停止問題を解くかであるが、幸いにしてこの問題は非常にシンプルな偏微分方程式(厳密に言えば自由境界問題)に還元されることが知られている。例えば、Peskir and Shiryaev (2006)の3章やPham (2009)の5章で紹介されている最適停止問題の標準的な解法を応用すれば問題(2)の解は以下のように与えられることが容易に導かれるのである。

$$\min \left[\rho v^0 - v_t^0 + \alpha x v_x^0 - \frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx}^0, v^0 - x \right]. \quad (3)$$

ここで継続領域 (continuation region) と呼ばれる集合を以下のように定義する

$$\mathcal{C}^0 := \{x \in R: v^0(t, x) > x\},$$

と同時に、その補集合として停止領域 (stopping region) と呼ばれる以下のような集合も定義する。

$$\mathcal{S}^0 := \{x \in R: v^0(t, x) = x\}.$$

ここで両者の経済学的意味を付け加えておく。 $v^0(t, x)$ は時点 t においてペアーの価値が x であることを条件として、その時点以降にペアーの価値の期待される最大値を

意味する。従って、もしペアーの価値の期待値 $v^0(t, x)$ がペアーの現時点の価値 x を上回るのならば、ペアーのポジションを流動化せずに保持し続けたほうが合理的である。そういった意味で $\mathcal{C}^0$ は継続領域と呼ばれるのである。しかし、もし両者が合致したならば、これ以上ポジションを保持してリスクをとる ($v^0(t, x)$ は期待値なので、ペアーの価値が将来 x を下回る可能性ももちろんある) 意味はなく、その時点でペアーのポジションを解消するのが合理的である。もちろん、 $v^0(t, x) < x$ となる領域は考える必要がない。そのような場合が時点 t 以前にあったならば、すでにポジションは流動化されているはずだからだ。そしてその意味で、 $\mathcal{S}^0$ は停止領域と呼ばれるのである。

さて、このように継続領域と停止領域を定義すると、(3) の解である価値関数 v^0 は次のように継続領域上で定義される偏微分方程式の粘性解として与えられることが知られている。

$$\rho v^0 - v_t^0 + \alpha x v_x^0 - \frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx}^0 = 0 \text{ on } \mathcal{C}^0.$$

さらに、価値関数 v^0 は継続領域 $\mathcal{C}^0$ の境界 $\partial \mathcal{C}^0$ で連続一階微分可能 ($\mathcal{C}^1$) である。ただし、継続領域 $\mathcal{C}^0$ の境界は開集合なの停止領域 $\mathcal{S}^0$ に含まれる。このとき、ある関数 $b: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ で境界 $\partial \mathcal{C}^0$ 上で $b = x$ となるようなものが存在する。つまり、継続領域の境界 $\partial \mathcal{C}^0$ 上で $v^0(t, b) = b$ であり、 $v_x^0(t, b) = 1$ である。注意すべきは上述したように継続領域の境界は停止領域に含まれるということである。すなわち、 $v^0(t, b) = b$ が成り立つときというのはペアーのポジションを流動化するタイミングそのものである。したがってある b に対してペアーの価値が合致する、すなわち、 $x = b$ が成り立つときがわかれば、ペアーのポジションを流動化する正確なタイミングを特定できるのである。

また、終端条件は $v^0(T, x) = x$ で与えられ ((3) の二つ目の式を参照されたい) だが、これは時点 $t = T$ までにたとえペアーの価値が最大期待値をとるポイントを見いだせなかったとしても、 T ではポジションを流動化することを意味する。つまり有限期間で投資を終わらせるということを数学的に定式化したものがこの終端条件になっている。

ここで、投資の最終時点 T までの残存期間 $\tau = T - t$ を定義したうえで、これを用いて $\tilde{v}^0(\tau, x) = v^0(t, x)$, $\tilde{b}(\tau) = b(t)$ を定義する。すると、上の最適停止問題は以下のように書き換えることもできる。

$$-\tilde{v}_\tau^0 - \alpha x \tilde{v}_x^0 + \frac{1}{2} \sigma^2 \tilde{v}_{xx}^0 = \rho \tilde{v}^0 \text{ on } \mathcal{C}^0, \quad (4)$$

$$\tilde{v}^0(\tau, \tilde{b}(\tau)) = \tilde{b}(\tau) \text{ and } \tilde{v}_x^0(\tau, \tilde{b}(\tau)) = 1 \text{ on } \partial \mathcal{C}^0, \quad (5)$$

$$\tilde{v}^0(0, x) = x. \quad (6)$$

このようにして得られた問題はしばしば自由境界問題と呼ばれるが、上のように終端条件が明示的に与えられるとき、この問題を解くのは少し難しくなる。たとえ(4)を形式的に解いて偏微分方程式の一般形を導き出すことができても、制約条件が多いため、すべての制約条件を満たす解を得ることができないケースが非常に多いためである。上の問題もまさにそのケースに当てはまるので、制約条件を一つでも減らしたい。そこ

で、ラプラス演算子 $\mathcal{L}$ を導入し、ラプラス変換後の関数 $\hat{v}^0$ を以下のように定義する。

$$\hat{v}^0(s, x) = \mathcal{L}[\tilde{v}^0] = \int_0^\infty \tilde{v}^0(\tau, x) e^{-s\tau} d\tau.$$

また、ラプラス変換の特性から以下が成り立つことに注意する。

$$\mathcal{L}[v_t^0] = s\hat{v}^0(s, x) - \tilde{v}^0(0, x),$$

$$\mathcal{L}[v_x^0] = \frac{\partial}{\partial x} \hat{v}^0(s, x),$$

$$\mathcal{L}[v_{xx}^0] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{v}^0(s, x).$$

さらに、継続領域もラプラス変換に対応して以下のように定義をしない。

$$\hat{\mathcal{C}}^0 := \{x \in \mathbf{R} : \hat{v}^0(s, x) > x/s\},$$

同様に停止領域も以下のように定義する。

$$\hat{\mathcal{S}}^0 := \{x \in \mathbf{R} : \hat{v}^0(s, x) = x/s\},$$

上の集合はすべての $s \in \mathbf{C}$ に対して定義されている。ただし、 $\mathbf{C}$ は複素数の集合である。これはラプラス変換によって定義域が実数から複素数に変換されたためである。

さてこのとき、ラプラス変換を適用し、(6) を(4)に代入すると、(4)-(5) は以下のように書き換えられる。

$$x - \alpha x \hat{v}_x^0 + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{v}_{xx}^0 = (\rho + s) \hat{v}^0 \text{ on } \hat{\mathcal{C}}^0,$$

$$\hat{v}^0(s, s\hat{b}(s)) = s\hat{b}(s) \text{ and } \hat{v}_x^0(s, s\hat{b}(s)) = 1 \text{ on } \partial\hat{\mathcal{C}}^0,$$

ここで $\hat{b} := \mathcal{L}[\tilde{b}]$ である。

ラプラス変換を入れたことで自由境界問題はより複雑な形式になったように見えるが、実は終端条件を消去できたので解をえることははるかに容易になっている。実際、この形式の常微分方程式は以下のように明示的な解をもつことを容易に示すことができる。

$$\hat{v}^0(s, x) = a \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} ux - \frac{u^2}{2}} du + \frac{x}{\alpha + \rho + s}.$$

こうして得られた解の一般形式に対して境界条件を適用すれば、次の二つの等式が得られる。

$$\hat{v}^0(s, s\hat{b}) = a \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} us\hat{b} - \frac{u^2}{2}} du + \frac{s\hat{b}}{\alpha + \rho + s} = s\hat{b},$$

$$\hat{v}_x^0(s, s\hat{b}) = a \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} us\hat{b} - \frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\alpha + \rho + s} = 1.$$

従って、これらの連立方程式を解くことで次のような最適境界 $\hat{b}(s)$ を得ることができる(ラプラス変換を施したものではあるが)。

$$\hat{b}(s) = \frac{\sigma}{s\sqrt{2\alpha}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}us\hat{b}(s)-\frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}us\hat{b}(s)-\frac{u^2}{2}} du}.$$

ただし、これは複素空間上で定義された境界なので、これに逆ラプラス変換を施し $\tilde{b}^*(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{b}]$ とし、さらに次のようにすることで、実数時間軸上で定義された最適境界 $b^*(t)$ が得られる。

$$b^*(t) = \tilde{b}^*(\tau),$$

ただし、 $\mathcal{L}^{-1}$ は逆ラプラス変換演算子である。以上、やや複雑な手順を踏む必要があるが、こうして得られた最適境界 b^* により、投資家はペアーの価値がこの境界にタッチしたときと平均回帰水準にタッチしたときを注意深く観察することで最適なペアーズ・トレーディング戦略を実行することができる。ただし、ここまでの議論はモデルの不確実性を勘案したものではないことにも注意しなければならない。もちろん、以下でモデルの不確実性を勘案した最適境界の導出を試みるが、ここまでの議論もまた重要なベンチマークになるのである。

3. 主要な結果

この節ではペアーズ・トレーディングが前提としているモデルが必ずしも正しくない可能性も考慮して最適戦略を構築する方法について検定する。ところでモデルの不確実性の本質は、参照にしている確率測度 P が本当の確率測度を表しているのかどうかかわからないというところにある。もちろん、参照確率測度 P があらかじめわかっているならば問題はないのだが、サイコロの出る目やコインの裏表と異なり資産価格が将来どのような値をとるかについての確率分布があらかじめ明らかであることは通常ない。そこで、なんらかのモデルを仮定し、これを推定する必要があるのだが、こうした推定になんらかの誤差が含まれる可能性は当然ある。こうした過誤を考慮することがモデルの不確実性を考慮することに直結するのである。

そこで、我々は測度空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度の族 $\mathcal{Q}$ を考える。参照確率測度 P の誤った特定を避けるためのもっとも直感的な方法は無数の確率測度の族 $\mathcal{Q}$ の中から期待収益を最小化するようなものを選ぶことだ。ただし、戦略(この場合は、いつペアーを流動化するか、という問題に還元される)は最適なものを選ぶ。つまり、最悪な推定をしてしまったということを前提したうえで戦略としては最善手を選ぶ、ということである。その最悪な推定の結果、導き出されるような確率測度を参照確率測度として用いるわけである。こうした設定を数学的に定式化すれば以下のように記述することができる。

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_x^Q [e^{-\rho(\tau-t)} X_\tau].$$

このように定式化された最適化問題はマクシミン期待効用と呼ばれ、しばしばモデル

の不確実性を考慮した中でもっとも「頑健な」戦略を導出する手法の一つと考えられている。しかし、マクシミン期待効用のような定式化を用いた場合、結果として投資家はマーケットに参加しないのが最適、という解が導き出されかねない。あまりに悲観的な参照確率測度を選んでしまうため、どのような戦略を選択しても正の収益を得られない、という期待値が導き出されかねないのだ。このような戦略は頑健という意味では確かにその通りではあるが、マーケットに参加し利益を獲得したい投資家にとっては無意味である。

そこで、本研究においてはより柔軟な戦略を考察することにした。すなわち、時点 t でペアーの価値が $x = X_t$ で条件づけられているものとして、次のような最適停止問題を考えるのである。

$$v(t, x) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} E^Q [e^{-\rho(\tau-t)} X_\tau^{t,x}], \quad (7)$$

ここで、 Q は以下の問題の解として与えられるものとする。

$$\inf_{Q \in \mathcal{Q}} \{E^Q [e^{-\rho(\tau-t)} X_\tau^{t,x}] + \lambda e^{-\rho(\tau-t)} H_x [Q|P]\}. \quad (8)$$

また、 λ は正の定数、 $H(\cdot)$ は以下で定義される相対エントロピーとする。

$$H_x(Q|P) := \begin{cases} E_x^Q \left[\ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right], & Q \in \mathcal{Q} \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

これは単純なマクシミン期待効用のように直接ペアーの価値を引き下げやすい参照確率測度を求めに行く手法とは大きく異なる。というのも、マクシミン期待効用は考えられる確率測度のうち、単に最悪なものを選択しているだけなので、確率測度の推定が部分的にせよ正しい可能性をまったく顧慮していない。しかし、実際には完全に真の確率測度を推定することができないにせよ、精緻な統計的な処理を施せば幾分かは正しい確率測度の推定が期待できるだろう。そこで、(8)式のように、参照確率測度 P (この場合は、統計的に推定された確率測度ということになる) と実際にペアーの期待値評価する確率測度 Q との違いを相対エントロピーで測るのである。もちろん、確率測度は平面上の点と点のように距離を測ることはできないので、相対エントロピーという測度間の距離を測る尺度を導入する必要がある。そして、この相対エントロピーに付与している定数 λ により、投資家がどれだけ推定された参照確率測度 P が正しいものと信じているかを反映させることとした。すなわち、 $\lambda \uparrow \infty$ のとき、投資家は参照確率測度 P を完全に正しいものと信じ切っていることを意味し、 $\lambda \downarrow 0$ のとき、投資家は P をまったく信じていないということを意味する。なぜなら、相対エントロピーは確率測度間の距離(違い)を測る尺度であるから、二つの確率測度がまったく同一であれば相対エントロピーはゼロになる。従ってもし $\lambda \uparrow \infty$ であれば、(8)を最小化することはすなわち $P = Q$ でな

なければならないことを意味する。つまり、ペアーの期待値評価するのに用いる確率測度は統計的に推定された参照確率測度そのものである。これはまさに推定を完全に信頼していることを意味する。逆に $\lambda \downarrow 0$ のとき(8)で選ばれた確率測度 Q はマクシミン期待効用で用いられるそれとまったく同じである。これは実質的に確率測度の推定を行わないことと同義である。すなわち、推定をまったく信じていないことの反映である。

実際のモデル運用にあたっては $\lambda \uparrow \infty$ と $\lambda \uparrow 0$ の間をとることになるだろう。どの程度の信頼度を選択すべきかは投資家の選好にもよるだろうし、そのときの推定の精度について投資家がどのように考えるかにもよるだろう。

最後に最適停止問題を解くためには終端条件、すなわち以下も仮定する

$$v(T, x) = x.$$

ただし、この条件は前節のようにモデルの不確実性を考慮しない場合と同様である。

以上のように設定した問題に対して、次の定理が導き出せる。

定理 1. $t \in [0, T)$ として、問題(7)の解である、最適な境界 $b(t)$ は $\hat{b}$ に逆ラプラス変換を施すことで得られる。ここで、 $\hat{b}$ は次の自由境界問題の解である。ただし、 $\hat{v}(s, x) = \mathcal{L}[v(T - t, x)]$ である。

$$-\rho \hat{v}(s, x) - s \hat{v}(s, x) + x - \alpha x \hat{v}_x(s, x) + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \hat{v}_x(s, x) \quad (9)$$

$$- \alpha, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{v}_{xx}(s, x) = 0 \text{ on } \hat{\mathcal{C}},$$

$$\hat{v}(s, s \hat{b}(s)) = s \hat{b}(s) \text{ and } \hat{v}_x(s, s \hat{b}(s)) = 1 \text{ on } \partial \hat{\mathcal{C}}. \quad (10)$$

定理 1はペアー X_t を保有する投資家は X_t が境界 $b(t)$ に達したときに流動化すべきと示唆し、また X_t を保有しない場合、 X_t が $b(t)$ に達した時、空売りし、ペアーが平均回帰水準 0に達した時ポジションを流動化するような戦略を示唆するものである。

実際、数値的に(9)(10)を解くことで、我々は最適な境界 $b(t)$ を得ることができる。ただし、これを数値的に解くことは必ずしも容易ではない。そこで、より扱いやすい形で最適戦略、あるいは同じことだが最適境界 $b(t)$ を導き出すために、次のような仮定を導入することにする。

$$\alpha < 1. \quad (11)$$

この仮定に含まれる α は(1)式の中で与えられるペアーの平均回帰水準への回帰速度である。もし、平均回帰水準への回帰速度が速すぎる場合、ペアー・トレーディングで利益を獲得するのが難しくなる。実際、あまりに回帰速度が速いペアーというのはしばしば回帰水準の周りをほんのわずかしき離れないことをも含意するため、一回の取引で得られる利益が小さくなる。十分大きな利益を獲得するには、ある程度ペアーの

価値が回帰水準を乖離する必要がある。さらに、後述するように、実データを用いた数値例もこの仮定を支持している。そこで、この仮定を採用することとするが、このとき以下の命題が言える。

命題 1. 定理1における仮定に加えて、(11)を仮定すると、最適境界 $\hat{b}(s)$ は近似的に以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\hat{b}(s) = & \frac{\sigma}{s\sqrt{2\alpha}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\left(s\hat{b}(s)+\frac{\sigma^2}{\alpha\lambda s-\alpha}e^{-\alpha T}\right)u-\frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\left(s\hat{b}(s)+\frac{\sigma^2}{\alpha\lambda s-\alpha}e^{-\alpha T}\right)u-\frac{u^2}{2}} du} \\ & + \frac{1}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T}.\end{aligned}$$

こうして得られた命題により、最適境界ははるかに計算しやすいものとなる。そこで、このようにして得られた最適境界を用いたペアーズ・トレーディングの戦略がどの程度有効であるか数値例を用いて示すこととしたい。

4. 数値例

この節では、前節において示した主要な結果を数値例に応用することを試みる。

ところで、有限期間の最適停止問題に対して導出された境界 $b(t)$ は極限においては無限期間の最適停止問題に対する境界と近くなければならない。実際、有限期間であっても期間が長くなれば無限期間の問題に近づくので、それに合わせて最適停止問題に対して導かれる境界も有限期間と無限期間とで近いものでなければおかしいからだ。そこで前節で導いた結論が正しいかどうかを数値的に確認するため、境界 $b(t)$ の計算において設定された有限期間の期間を長くすることで無限期間の境界に実際の数値を用いても近づくことを確認する。

さてここで、 b^* を無限期間の最適停止問題に対する境界とする。するとこれは以下のように与えられる(詳細はYoshikawa (2017)を参照されたい)。

$$b^* = \frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}ub^*-\frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}ub^*-\frac{u^2}{2}} du},$$

ここで、無限期間の最適停止問題に対する境界はラプラス変換を要しないことに注意したい。つまり、数値上はより有限期間の最適停止問題より容易に求まるのだ。ただし、ラプラス変換を用いるかどうかの差異はあるにせよ、最適境界の形式自体は似ていることも興味深い特徴である。

これを用いて、有限期間と無限期間の境界を示したのが図1である。ここで、我々は境界 b^* と $b(t)$ を、期間を $T = 1, 25, 50, 100$ そして ∞ とすることで計算した。その他のパラメータについては $\alpha = 0.9, \sigma = 0.3$ とした。図1の左図では無限および有限期間の境界がモデル・リスクを考慮することなく計算されている。すなわち、 $\lambda = \infty$ としている。また、右図においてはモデル・リスクを考慮して境界を計算している。ここでは $\lambda = 10$ として計算してみた。

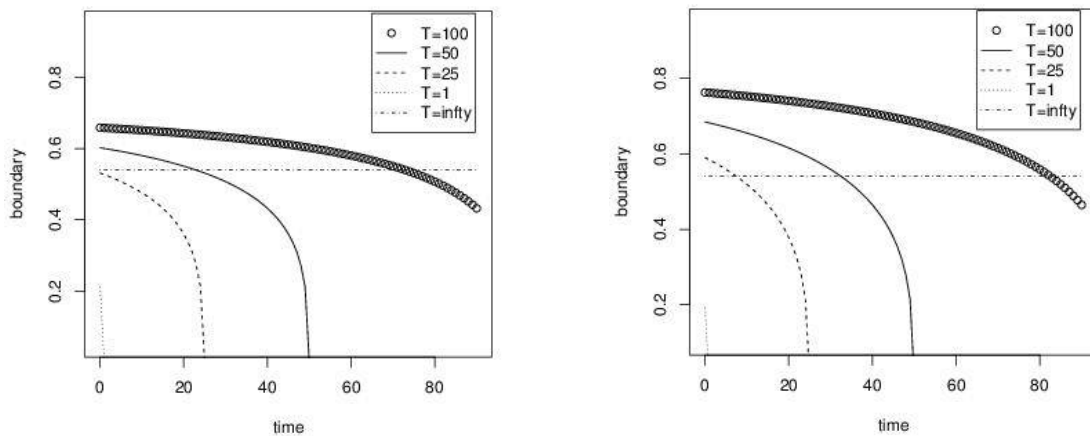


図 1. 様々な期間に対する境界。左図は $\lambda = \infty$ とし、右図は $\lambda = 10$ として境界を計算している。

期間が有限なため、境界は期間の満期近くで急激に落ち込んでいる。これは、満期になるとペアーを流動化しなければならないことを反映している。ペアーの価値が境界の上の領域にあるとき、ペアーは最大値をとったとみなされるからである。しかし、有限期間の残存期間が長くなるほど、境界の傾きは緩やかになってくる。ここで無限期間の場合の境界がフラットな形状をしていることを勘案すると、有限期間に対する境界は期間が長くなるにつれ無限期間に対する境界に近づくことを含意する。こうしたことから我々が導いた有限期間の最適境界は有限期間の期間を長くすることで確かに無限期間のそれに近づいていくことを確認できた。

次に、我々はペアー・トレーディングの手法をダウ＝ジョーンズ工業平均に登録されている銘柄に応用することとした。これにより、本研究で得られた結果の実際の応用可能性を検討するのである。

そのためにはまずモデル・パラメータ μ, α, σ そして ρ が必要となる。パラメータ推定作業にあたっては、最初に2017年6月1日から2017年9月30日までの市場データのサンプリングを行った。次に、これらのサンプルから可能なすべてのペアーを組み合わせ、各ペアーの時系列データに対してPhilips-Ouliaris 検定を行った。Philips-Ouliaris 検定は共和分検定の中でも代表的なもののひとつであり、時系列の平均回帰性をチェッ

クする標準的な方法である。30種のうちから2つの銘柄をペアとして取り出すので、ペアの数としては435個のペアがありうる。これらのペアに対し、Philips-Ouliaris 検定を行った結果、8つのペアが検定にパスした。具体的には、以下の銘柄である：(シスコ・システムズ(Cisco Systems), ファイザー (Pfizer)), (コカ・コーラ(Coca-Cola), ユナイテッド・テクノロジーズ(United Technologies)), (ゼネラル・エレクトリック (General Electric), マクドナルド(McDonald's)), (ゼネラル・エレクトリック (General Electric), ユナイテッド・ヘルス・グループ (UnitedHealth Group)), (マクドナルド(McDonald's), P&G (Procter & Gamble)), (マクドナルド(McDonald's), ユナイテッド・ヘルス・グループ (UnitedHealth Group)), (マクドナルド(McDonald's), ユナイテッド テクノロジーズ (United Technologies)), そして (マクドナルド(McDonald's), ビザ(Visa))。

Pairs	μ	α	σ
"CSCO" "PFE"	14.62	0.21	0.28
"KO" "UTX"	59.42	0.24	0.22
"GE" "MCD"	86.01	0.33	0.59
"GE" "UNH"	64.71	0.23	0.35
"MCD" "PG"	70.27	0.24	1.35
"MCD" "UNH"	76.58	0.36	1.41
"MCD" "UTX"	215.19	0.23	1.52
"MCD" "V"	96.00	0.33	1.41

表 1. ティッカー・コードは以下のように定められている“CSCO” はシスコ・システムズ, “PFE” はファイザー, “KO” はコカ・コーラ, “UTX” はユナイテッド・テクノロジーズ, “GE” はゼネラル・エレクトリック, “MCD” はマクドナルド, “UNH” はユナイテッド・ヘルス・グループ, “PG” はP&G, そして “V” はビザである。

これらのペアが平均回帰性をもつものとしてペアの価値の時系列データに対してOrnstein-Uhlenbeck (OU)過程をあてはめてみた。すなわち、最尤法でOU過程のパラメータ推定を行った結果が表1である。注意したいのが、すべてのペアにおいてパラメータ α が1以下である点である。これにより、実データを用いた場合、回帰速度は

ある程度の緩やかさを持つこと、そして先述した命題1において用いた仮定(11)が実データにおいて一定の妥当性を持つことも確認できた。次に $\rho = 0.0095$ とした。これは連邦準備制度理事会が公表する3か月金利データを用いた（以下のURLを参照のこと

<https://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>）。

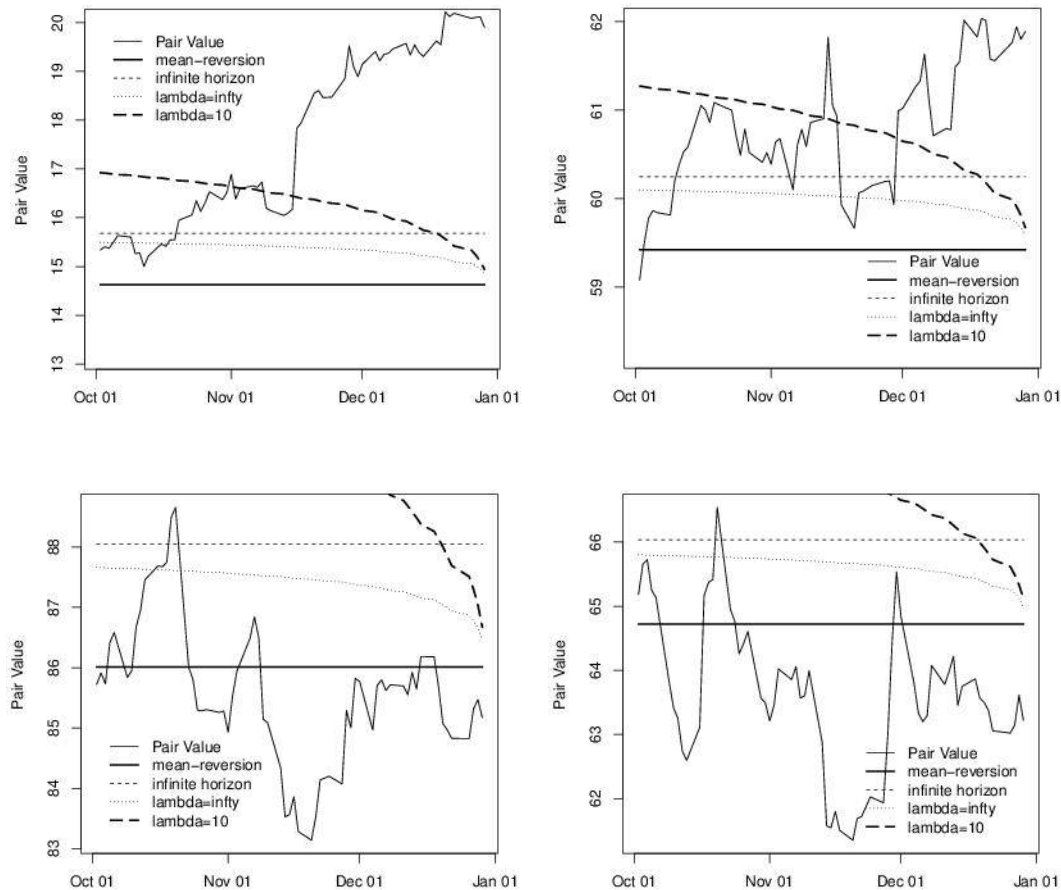


図 2. 左上図は(シスコ・システムズ, ファイザー)のペアーの価値とその戦略、右上図は(コカ・コーラ、ユナイテッド・テクノロジー),左下は(ゼネラル・エレクトリック、マクドナルド),そして右下が(ゼネラル・エレクトリック、ユナイテッド・ヘルス・グループ)である。

こうして得られたパラメータを用いて、最適なペアー・トレーディング戦略の導出を行った。もちろんこうして得られたパラメータの推定値が誤っている可能性はあるが、そうした過誤を勘案して境界を導き出すことが本研究の成果であることは言うまでもない。ここで、導出した結果の応用可能性をより確かにするために、戦略の計算に用いたサンプルが2017年9月31日までなのに対し、ペアー・トレーディング戦略の適用は2017年

1月から2017年12月31日までのアウト・オブ・サンプルとなる市場データを用いた。

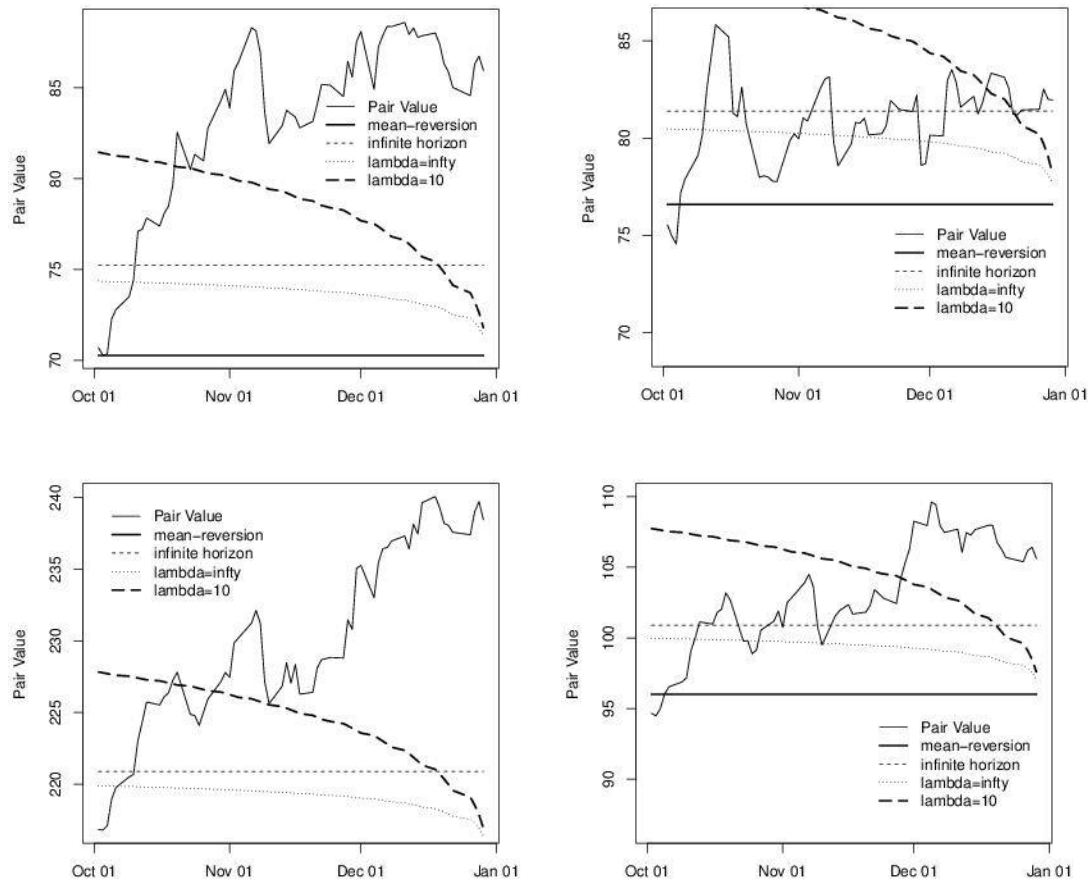


図 3. 左上図は(マクドナルド, P&G)のペアーの価値とその戦略をプロットしたもの。右上図は(マクドナルド, ユナイテッド・ヘルス・グループ), 左下図は(マクドナルド, ユナイテッド・テクノロジー), そして右下図は(マクドナルド, ビザ)である。

図2 と 図3 は2017年10月1日から2017年12月31日までの市場データをプロットしたほか、平均回帰水準、無限期間の最適停止境界、そして有限期間の最適停止境界をそれぞれ $\lambda = 10$ と $\lambda = \infty$ としてプロットしたものである。まず、いくつか例外はあるものの、今回シミュレーションに用いた市場データはアウト・オブ・サンプルを用いたにも関わらずイン・サンプルで計算された平均回帰水準におおむね回帰しているように見えることに注意したい。時間の経過とともに回帰水準から離れていくペアーでさえ当初は平均回帰性を示すものも多く、共和分検定の安定性を示すものであろう。

また、平均回帰水準と境界の間の乖離は $\lambda = 10$ としたときのほうが $\lambda = \infty$ とした時の方より大きいことも確認される。これは、もしペアーの価値が大きくなったとしても、パラメータ推定に自信がない投資家(つまり λ が小さい)はペアーの価値がまだ最大値に到達しているとは思えないことを意味する。その意味で、小さな λ に対する境界は大き

な λ に対する境界よりも平均回帰水準から遠ざかるのは自然と言えよう。

さて以上で大まかな傾向についてはシミュレーション図からわかるわけだが、結局のところ実際にトレーディングを行ったときにどの程度収益が見込めるかまで分析しなければ応用可能性の検討としては不十分である。そこで、様々な境界を用いてペアー・トレーディングを行った場合の収益計算を試みた。

そのため次のようなトレーディング・ルールを設定した。まずポジションを持っていない状態でペアーの価値が境界 $b(t)$ または平均回帰水準 μ に触れたときにポジションを組む。具体的には $b(t)$ に触れたときはペアーをショート、 μ に触れたときはロング・ポジションをとるのである。そして、ショートしているポジションは、ペアーの価値が次に μ に触れたとき流動化し、同様にロングしているポジションは、ペアーの価値が次に $b(t)$ に触れたときに流動化する。流動化され、ポジションが解消された後は、再びペアーの価値が $b(t)$ または μ に触れるのを待つのである。そして再びペアーの価値が $b(t)$ または μ に触れたら、先ほど同様にロングまたはショートのポジションを組み、利益確定のタイミングを待つ。もちろん、満期までポジションをもってしまった場合は無条件でポジションは流動化される。

Pairs	Infinite Horizon	$\lambda = 10$	$\lambda = \infty$
"CSCO" "PFE"	0.25	0.15	0.30
"KO" "ÜTX"	-0.96	0.01	-0.97
"GE" "MCD"	-2.95	-0.09	-2.95
"GE" "ÜNH"	1.99	1.99	-3.01
"MCD" "PG"	0.12	0.05	0.16
"MCD" "ÜNH"	0.09	-0.03	0.098
"MCD" "ÜTX"	0.07	0.06	0.09
"MCD" "V"	0.08	-0.001	0.07

表 2. 無限期間、有限期間かつ $\lambda = 10$ および $\lambda = \infty$ に対する各境界を用いたペアー・トレーディング戦略を適用した場合の投資収益.

以上のようなルールでトレーディングのシミュレーションを行った結果、表2のような

投資収益が得られた。

表2の第2列は無限期間のもとで計算した境界を用いたペアーズ・トレーディング戦略による投資収益である。ただし、この境界はモデル・リスクは考慮されていない(つまり $\lambda = \infty$ である)。第4列も同様にモデル・リスクは考慮されていないが、期間は有限となっている。期間を有限に制約することで、“CSCO”, “PFE”), (“MCD”, “PG”), (“MCD”, “UNH”), そして (“MCD”, “UTX”)においてより大きな投資収益を獲得している。しかし、“KO”, “UTX”), (“GE”, “UNH”)において無限期間、有限期間いずれにおいても非常に大きな損失が発生している。これは単に有限期間の設定をして境界を計算するだけでは大きな損失を回避するには不十分であることを示している。実際、第3列はモデル・リスクを考慮した場合の投資収益を記述しているのだが、これは他の二つの場合(無限期間および有限期間でモデル・リスクを考慮していない)では大きな損失を発生させているケースに対しても、損失を減らすことができている。例えば、“KO”, “UTX”) や (“GE”, “MCD”)などを見られたい。すなわち、上の結果はモデル・リスクを考慮に入れることが確かにペアー・トレーディング戦略の投資収益結果を安定させる可能性があることを示唆しているように思われる。

5. まとめ

本研究では、ペアーズ・トレーディングを実施するにあたり、前提とするモデルの推定が誤っている可能性を考慮した戦略を提案した。特に、保険や年金基金のファンド・マネージャーなど有限期間で安定的に資産運用する必要がある投資家を念頭に、モデルの不確実性を考慮しつつ有限期間の最適停止問題に取り組んだ。その結果、得られた結果を実データに応用し無限期間にせよ有限期間にせよモデルの不確実性を顧慮しない戦略よりもモデルの不確実性を考慮したほうが一定の安定性をもつことを示すことができた。

6. 付録

6.1 定理1の証明

(8)の引数に対して以下が成り立つ。

$$\int \left(e^{-\rho(\tau-t)} X_{\tau}^{t,x} + \lambda e^{-\rho(\tau-t)} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right) dQ = \lambda e^{-\rho(\tau-t)} \int \ln \left(e^{X_{\tau}^{t,x}/\lambda} \frac{dQ}{dP} \right) dQ.$$

相対エントロピー $H[Q|P]$ が $Q = P$ のときに最小化されることに注意すると、上式より (8)

の最適化は以下のように達成されることがわかる: (詳細な導出過程は Detlefsen and Scandolo (2005) や Föllmer and Penner (2006)などを参照されたい)

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_s} = \frac{e^{-X_s^{t,x}/\lambda}}{E[e^{-X_s^{t,x}/\lambda}]} \text{ for } s \in [t, T].$$

また、 $dX_s^{t,x} = -\alpha X_s^{t,x} ds + \sigma dW_s$ なので、 $X_s^{t,x} = e^{-\alpha(s-t)}\left(x + \int_t^s \sigma e^{\alpha u} dW_u\right)$ がいえる。

それゆえ、

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_s} &= \frac{e^{-X_s^{t,x}/\lambda}}{E[e^{-X_s^{t,x}/\lambda}]} = \frac{e^{-\frac{1}{\lambda}e^{-\alpha(s-t)}\left(x + \int_t^s \sigma e^{\alpha u} dW_u\right)}}{E\left[e^{-\frac{1}{\lambda}e^{-\alpha(s-t)}\left(x + \int_t^s \sigma e^{\alpha u} dW_u\right)}\right]} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{\lambda}\int_t^s \sigma e^{\alpha(u-t)} dW_u}}{E\left[e^{-\frac{1}{\lambda}\int_t^s \sigma e^{\alpha(u-t)} dW_u}\right]}. \end{aligned}$$

が成り立つ。

これと Girsanov, Cameron and Martin の定理を用いれば、 Q -ブラウン運動 W^* は以下のように与えられる。

$$W_s^* = W_s + \frac{\sigma}{\lambda\alpha}(1 - e^{-\alpha s}).$$

このとき、 $X^{t,x}$ は以下の確率微分方程式で記述される

$$dX_s^{t,x} = -\left(\alpha X_s^{t,x} + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha(s-t)}\right) ds + \sigma dW_s^*.$$

ここで、継続領域を以下のように定義する。

$$\mathcal{C} := \{x \in \mathbf{R} : v(t, x) > x\},$$

また、停止領域を以下のように定義する。

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbf{R} : v(t, x) = x\}.$$

第2節で示したのと同様に、次のような自由境界問題が導かれる。

$$-\rho v + v_t - \left(\alpha x + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha t}\right) v_x + \frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx} = 0 \text{ on } \mathcal{C},$$

$$v(t, b(t)) = b(t) \text{ and } v_x(t, b(t)) = 1 \text{ on } \partial\mathcal{C},$$

$$v(T, x) = x.$$

ここで、 $\tau = T - t$ と $\tilde{v}(\tau, x) = v(t, x)$ を定義する。すると、以下が成り立つ。

$$-\rho \tilde{v} - \tilde{v}_\tau - \left(\alpha x + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha(T-\tau)}\right) \tilde{v}_x + \frac{1}{2} \sigma^2 \tilde{v}_{xx} = 0 \text{ on } \mathcal{C}, \quad (12)$$

$$\tilde{v}(\tau, \tilde{b}(\tau)) = \tilde{b}(\tau) \text{ and } \tilde{v}_x(\tau, \tilde{b}(\tau)) = 1 \text{ on } \partial\mathcal{C}, \quad (13)$$

$$\tilde{v}(0, x) = x. \quad (14)$$

ラプラス変換に合わせて $\tilde{v}$ に対する継続領域を新たに以下のように定義する。ここで、

$$\hat{v} = \mathcal{L}[\tilde{v}] \text{である。}$$

$$\hat{\mathcal{C}} := \{x \in \mathbf{R} : \hat{v}(s, x) > x/s\},$$

また、停止領域も以下のようにラプラス変換に合わせて定義しなおす。

$$\hat{\mathcal{S}} := \{x \in \mathbf{R} : \hat{v}(s, x) = x/s\},$$

上の二つの領域に現れる $s \in \mathbf{C}$ において $\mathbf{C}$ は複素数の集合である。これはラプラス変換の定義によるものである。

ラプラス変換を(12)–(13)に適用し、(14) をラプラス変換された(12)に代入するとラプラス変換の一意性から、以下が従う。

$$-\rho \hat{v}(s, x) - s \hat{v}(s, x) + x - \alpha x \hat{v}_x(s, x) + \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \hat{v}_x(s - \alpha, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{v}_{xx}(s, x) = 0 \text{ on } \hat{\mathcal{C}}, \quad (15)$$

$$\hat{v}(s, s \hat{b}(s)) = s \hat{b}(s) \text{ and } \hat{v}_x(s, s \hat{b}(s)) = 1 \text{ on } \partial \hat{\mathcal{C}}, \quad (16)$$

これを数値的に解き逆ラプラス変換を $\hat{b}$ 施せば以下が得られる

$$b(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{b}]. \quad (17)$$

6.2 命題 3.1 の証明

仮定 $\alpha < 1$ のもとで、(15)式の第5項に次のような計算を施してみる。

$$\begin{aligned} \hat{v}_x(s - \alpha, x) &= \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)\tau} \tilde{v}_x(\tau, x) d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-su} \tilde{v}_x\left(\frac{s}{s-\alpha}u, x\right) du \\ &\approx \int_0^\infty e^{-su} \left(\tilde{v}_x(u, x) + \tilde{v}_{\tau,x}(u, x) \left(\frac{\alpha}{s-\alpha}u\right) \right) du \\ &= \int_0^\infty e^{-su} \tilde{v}_x(u, x) du + \frac{\alpha}{s-\alpha} \int_0^\infty e^{-su} u \tilde{v}_{\tau,x}(u, x) du \\ &= \hat{v}_x(s, x) - \frac{\alpha}{s-\alpha} \hat{v}_x(s, x) = \frac{s}{s-\alpha} \hat{v}_x(s, x). \end{aligned}$$

仮定(11) は上の近似の誤差がさほど大きくないこと、具体的には $O(1)$ よりも大きくないことを保証してくれる。

上式を(15)に代入すると、以下のシンプルな常微分方程式を導き出すことができる。

$$-(\rho + s)\hat{v}(s, x) + x - \left(\alpha x - \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \frac{s}{s - \alpha} \right) \hat{v}_x(s, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{v}_{xx}(s, x) = 0 \text{ on } \hat{\mathcal{C}},$$

$$\hat{v}(s, \hat{b}(s)) = \hat{b}(s) \text{ and } \hat{v}_x(s, \hat{b}(s)) = 1 \text{ on } \partial \hat{\mathcal{C}},$$

このシンプルな常微分方程式は一般解と特殊解をもち、これらをそれぞれ $\hat{v}_G$ および $\hat{v}_P$ と記述することにする。そして、これらの一般解と特殊解は以下のように与えられる。

$$\hat{v}_G(x) = c_1 \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(x - \frac{\sigma^2}{\alpha \lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du,$$

$$\hat{v}_P(x) = \frac{1}{\rho + s + \alpha} x - \frac{1}{\rho + s + \alpha} \frac{1}{\rho + s} \frac{s}{s - \alpha} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T}.$$

それゆえ、 $\hat{v} = \hat{v}_G + \hat{v}_P$ により解の形式を導き出すことができる。最後に定数 c_1 を境界条件が満たされるように決めてやる必要がある。すなわち、以下が必要となる。

$$\begin{aligned} \hat{v}(s, \hat{b}(s)) &= c_1 \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(\hat{b}(s) - \frac{\sigma^2}{\alpha \lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du \\ &\quad + \frac{1}{\rho + s + \alpha} \hat{b}(s) - \frac{1}{\rho + s + \alpha} \frac{1}{\rho + s} \frac{s}{s - \alpha} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} = \hat{b}(s). \end{aligned} \quad (18)$$

ここで $\hat{v}_x = c_1 \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(x - \frac{\sigma^2}{\alpha \lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\rho + s + \alpha}$ に注意すると、以下が得られる。

$$\hat{v}_x(s, \hat{b}(s)) = c_1 \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(\hat{b}(s) - \frac{\sigma^2}{\alpha \lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\rho + s + \alpha} = 1. \quad (19)$$

(18)と(19)により、次のようにラプラス変換した境界が得られる

$$\begin{aligned} \hat{b}(s) &= \frac{\sigma}{s\sqrt{2\alpha}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(\hat{b}(s) - \frac{\sigma^2}{\alpha \lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(\hat{b}(s) - \frac{\sigma^2}{\alpha \lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du} \\ &\quad - \frac{1}{\rho + s + \alpha - 1} \frac{1}{\rho + s} \frac{s}{s - \alpha} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T}. \end{aligned}$$

6.3 逆ラプラス変換の数値計算にあたって

第3節の主要な結果で示したように、有限期間における最適境界を導出するにはラプラス変換および逆ラプラス変換が必要になる。特に具体的に市場データを用いて境界を導出するには、手順としてラプラス変換をスキップすることはできる(命題1で示されたように、解析近似解を用いれば直接ラプラス変換を行うことなく、ラプラス変換後の境界を得ることができる)ものの、理論的にはラプラス変換された境界なので複素数で定

義されている。実務上意味ある数値を得るためには、ラプラス変換された境界を逆ラプラス変換により実数領域に戻してやる必要があるのだ。そこで、以下のように、

1. まず、境界 $\hat{b}$ をラプラス空間上で導出する。
 2. 次に逆ラプラス変換を施して実数上で定義された境界を計算する
- といった手続きを踏んでやる必要がある。

ここで、 $\hat{b}$ の計算は比較的容易である。 $\hat{b}$ は第2節の末尾でも与えたが、念のため再掲する。

$$\hat{b}(s) = \frac{\sigma}{s\sqrt{2\alpha}} \frac{\int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}us\hat{b}(s)-\frac{u^2}{2}} du}{\int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}us\hat{b}(s)-\frac{u^2}{2}} du}. \quad (20)$$

逆ラプラス変換を考えず、単に(20)を実装するだけであれば、これは容易である。しかし、積分を含んだこの式の逆ラプラス変換は必ずしも安定していない。なぜなら、積分項に逆ラプラス変換をそのまま適用してもしばしば無限大に発散してしまうからだ。

そこで、安定的に境界 $\hat{b}$ を計算するために積分項の近似を考える。一つのアイデアとして不完全ガンマ分布の性質を利用することを提案したい。理由は単純で、(20)式が含む積分項が不完全ガンマ分布と(同一ではないが)似た形式をとるからである。

まず以下の関数 $g(x)$ を定義する。

$$g(x) := \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}ux-\frac{u^2}{2}} du. \quad (21)$$

このとき、(20)は以下を解くこと同値であることに注意したい。

$$g(x) = g'(x)x, \quad (22)$$

そして、 $x^* = s\hat{b}(s)$ を $g(x^*) = g'(x^*)x^*$ となるように定義する。

上式に0周りのテイラー展開を適用すると、以下が得られる。

$$\begin{aligned} g(0) - \frac{1}{2}g''(0)x^2 - \frac{1}{3}g'''(0)x^3 \\ - \frac{1}{8}g^{(4)}(0)x^4 \\ - \frac{1}{24}g^{(5)}(0)x^5 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、以下が成り立つことに注意する。

$$g(0) = \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

上式を計算するために、一般化ガンマ分布を用いる。ここで、一般化ガンマ分布の密度関数は以下のように定義されていることを思い出さねばならない。

$$f(u; a, d, p) = \frac{(p/a^d)u^{d-1}e^{-(u/a)^p}}{\Gamma(d/p)},$$

ただし、 $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ はガンマ関数である。 $a = \sqrt{2}$, $d = (\rho + s)/\alpha$ として $p = 2$ として、次を定義する。

$$f(u; \sqrt{2}, (\rho + s)/\alpha, 2) = \frac{(2/\sqrt{2})^{(\rho+s)/\alpha} u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{-\frac{u^2}{2}}}{\Gamma((\rho + s)/2\alpha)}.$$

このとき、一般化ガンマ分布により定義されている確率変数 U に対して、 $g(0)$ を以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{\Gamma((\rho + s)/2\alpha) (2/\sqrt{2})^{(\rho+s)/\alpha} \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{-\frac{u^2}{2}} du}{(2/\sqrt{2})^{(\rho+s)/\alpha} \Gamma((\rho + s)/2\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma((\rho + s)/2\alpha)}{(2/\sqrt{2})^{(\rho+s)/\alpha}} \end{aligned}$$

同様に、 $g'(0), g''(0), g'''(0)$ として $g''''(0)$ を以下のように計算できる。まず、

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} ux - \frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{\sqrt{2\alpha} \Gamma((\rho + s)/2\alpha) (2/\sqrt{2})^{(\rho+s)/\alpha} \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{-\frac{u^2}{2}} du}{\sigma (2/\sqrt{2})^{(\rho+s)/\alpha} \Gamma((\rho + s)/2\alpha)} \\ &= \frac{\sqrt{2\alpha} \Gamma((\rho + s)/2\alpha)}{\sigma (2/\sqrt{2})^{(\rho+s)/\alpha}} \mathbb{E}[U] \\ &= \frac{\sqrt{2\alpha} \Gamma((\rho + s)/2\alpha)}{\sigma (2/\sqrt{2})^{(\rho+s)/\alpha}} \sqrt{2} \Gamma((\rho + s)/2\alpha + 1/2) \\ &\quad / \Gamma((\rho + s)/2\alpha) \\ &= \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} 2^{\frac{\rho+s}{2\alpha}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{(\rho + s)/\alpha + 1}{2}\right), \end{aligned}$$

であるが、これにより以下がわかる。

$$\begin{aligned}
g''(0) &= \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\right)^2 \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}+1} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\right)^2 2^{\frac{\rho+s}{2\alpha}} \Gamma\left(\frac{(\rho+s)/\alpha+2}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'''(0) &= \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\right)^3 \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}+2} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\right)^3 2^{\frac{\rho+s}{2\alpha}+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{(\rho+s)/\alpha+3}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{(4)}(0) &= \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\right)^4 \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}+3} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\right)^4 2^{\frac{\rho+s}{2\alpha}+1} \Gamma\left(\frac{(\rho+s)/\alpha+4}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{(5)}(0) &= \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\right)^5 \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}+4} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma}\right)^5 2^{\frac{\rho+s}{2\alpha}+\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{(\rho+s)/\alpha+5}{2}\right)
\end{aligned}$$

これらを(23)式に代入し解いてやれば、 $s\hat{b}(s)$ をその解として得ることができる。

いったん、境界 $\hat{b}(s)$ を積分形式ではなく多項式によって導き出すことさえできれば、あとはこれに逆ラプラス変換を施せばよい。逆ラプラス変換を数値的に施す方法は様々なものが提案されているが、今回はStehfestの方法を用いることとした。

命題1で与えられている境界 $\hat{b}(s)$ も積分を含むが、基本的には上と同じ方法を使ってやればよい。ただし、その計算は一層煩雑になるので整理には注意を要する。すなわち、まず命題1の $\hat{b}(s)$ を以下のように書き換えてやる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(s\hat{b}(s) \right. \\
&+ \left. \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \right) \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(s\hat{b}(s) - \frac{\sigma^2 s}{\alpha \lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du \\
&= \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(s\hat{b}(s) - \frac{\sigma^2 s}{\alpha \lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du.
\end{aligned}$$

ここで関数 $h(x) := \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sigma} \left(x - \frac{\sigma^2}{\alpha\lambda s - \alpha} e^{-\alpha T} \right) u - \frac{u^2}{2}} du$ を定義する。すると、上の方程式は以下と同値であることがわかる。

$$\begin{aligned} & \left(s\hat{b}(s) \right. \\ & \left. + \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \right) h' (s\hat{b}(s)) \\ & = h(s\hat{b}(s)). \end{aligned}$$

それゆえ、我々の目標は $\left(x + \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \right) h' (x) = h(x)$ を解き、

$\hat{b}(s) = x^*/s$ を用いて $\hat{b}(s)$ を導出することとなる。ただし、 x^* は $\left(x + \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \right) h' (x) = h(x)$ の解である。

さて、 $h(x)$ を $A := \frac{\sigma^2}{\alpha\lambda} \frac{s}{s-\alpha} e^{-\alpha T}$ の周りでテイラー展開することを考える。このとき、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} h(x) & \approx h(A) + h' (A)X + \frac{1}{2} h'' (A)X^2 \\ & + \frac{1}{6} h''' (A)X^3. \end{aligned} \tag{24}$$

簡単のため、 $X := x - A$ とした。同様に、 $h' (x)$ のテイラー展開も考える。すると、以下が得られる。

$$\begin{aligned} h' (x) & \approx h' (A) + h'' (A)X + \frac{1}{2} h''' (A)X^2 \\ & + \frac{1}{6} h'''' (A)X^3 \end{aligned} \tag{25}$$

$h(x) = \left(x + \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \right) h' (x) = \left(x - \frac{\sigma^2}{\alpha\lambda} \frac{s}{s-\alpha} e^{-\alpha T} + \frac{\sigma^2}{\alpha\lambda} \frac{s}{s-\alpha} e^{-\alpha T} + \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \right) h' (x) = \left(X + \frac{\sigma^2}{\alpha\lambda} \frac{s}{s-\alpha} e^{-\alpha T} + \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \right) h' (x)$ なので、これと(25)を用いて、(24)を書き換えると、結局以下が得られる。

$$h(A) + h' (A)X + \frac{1}{2} h'' (A)X^2 + \frac{1}{6} h''' (A)X^3.$$

$$\begin{aligned}
&= \left(X + \frac{\sigma^2}{\alpha\lambda} \frac{s}{s-\alpha} e^{-\alpha T} + \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T} \right) \\
&\quad \times \left(h'(A) + h''(A)X + \frac{1}{2}h'''(A)X^2 + \frac{1}{6}h^{(4)}(A)X^3 \right) \\
&= (X+B) \left(h'(A) + h''(A)X + \frac{1}{2}h'''(A)X^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6}h^{(4)}(A)X^3 \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6}h^{(4)}(A)X^4 + \left(\frac{1}{6}Bh^{(4)}(A) + \frac{1}{3}h'''(A) \right) X^3 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}Bh'''(A) + \frac{1}{2}h''(A) \right) X^2 \\
&\quad + Bh''(A)X + \left(Bh'(A) - h(A) \right) = 0,
\end{aligned}$$

ここで $B := \frac{\sigma^2}{\alpha\lambda} \frac{s}{s-\alpha} e^{-\alpha T} + \frac{s}{(\rho+s+\alpha-1)(\rho+s)(s-\alpha)} \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\alpha T}$ である。

$$h(A) = \int_0^\infty u^{\frac{\rho+s}{\alpha}-1} e^{-\frac{u^2}{2}} du = g(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{\rho+s}{2\alpha}\right)}{2/\sqrt{2}^{(\rho+s)/\alpha}}, \quad h'(A) = g'(0), \quad h''(A) =$$

$g''(0)$, $h'''(A) = g'''(0)$ そして $h^{(4)}(A) = g^{(4)}(0)$ を用いれば、上の方程式を数値的に解くことは容易である。

参考文献

- Detlefsen, K. and G. Scandolo (2005). Conditional and dynamic convex risk measures. *Finance and Stochastics* 9, 539–561.
- Ekström, E., C. Lindberg, and J. Tysk (2011). Optimal liquidation of a pairs trade. In G. Nunno and B. Øksendal (Eds.), *Advanced Mathematical Methods for Finance*, pp. 247–255. Berlin: Springer.
- Elliott, R., J. Van Der Hoek, and W. Malcolm (2005). Pairs trading. *Quantitative Finance* 5, 271–276.
- Elliott, R., J. Van Der Hoek, and W. Malcolm (2005). Pairs trading. *Quantitative Finance* 5, 271–276.
- Föllmer, H. and I. Penner (2006). Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions. *Statistics & Decisions* 24, 61–96.

- Larsson, S., C. Lindberg, and M. Warfheimer (2013). Optimal closing of a pair trade with a model containing jumps. *Applications of Mathematics* 58, 249–268.
- Peskir, G. and A. Shiryaev (2006). *Optimal stopping and free-boundary problems*. Birkhäuser Verlag.
- Pham, H. (2009). *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Berlin: Springer.
- Yoshikawa, D. (2017). An entropic approach for pair trading. *Entropy* 19, 320.