所得変動の私的情報下における社会保険の長期間持続可能な仕組み

大角 道子

要旨

所得変動が個々人の私的情報であるとき，それに対する保険はリスクを減らす用途で機能しないことが知られている．先行研究 (Green 1987) はその状況下で最適な社会保険制度を存続すれば理論上社会全体を貧困化させるとともに社会階級を形成することを示した．この帰結は保険に入った個人に正直な申告を促すインセンティブを付与するために生じる．高い所得を正直に申告すると将来優遇を受けられるのでかえってリスクを創出することになる．

本調査研究は上記で述べた理論上の通説を今日利用可能な理論モデルを用いて慎重に再評価し，以下を同時に満たす仕組みが可能であることを示す．(i) 期内完全保険 を約束し，リスクを将来へ先送りする．(ii) 同一世代内で社会的序列を生まない．(iii) 一定条件下で持続可能 である．

1　はじめに

リスク回避的な個人が所得と選好に関して私的な情報を持つ経済では、これらの変動を保険することは理論的に不可能とされます．たとえば昨日実現した所得が 9 で今日の所得が 2 だったとします．しかし 1 日の消費を満たすためには最低でも 3 の所得　が必要です．この所得は果物のように腐敗するため翌日へは繰り越せません．このような場合，個人は最低所得を保証してくれる保険を望みます．もし所得が公開情報なら，高所得者から低所得者へ再分配する効率的な保険が設計することが可能です．ここでの保険はたとえば政府による所得再配分を含む広義の保険です．しかし所得が私的情報であれば，そのような保険は成り立たないと言われています．所得が公でない状況は高所得者に所得を偽って報告し，給付を受けることで利する動機を与えるからです．経済全体で所得の変動を平滑化するには，真実の申告を促す誘引が必要であり，それが最適な保険の仕組みを考える上で最大の障害です．

Green (1987) や Thomas and Worrall (1990) などの先行研究は以下ような問題を指摘しています．政府のような仲介者が高所得を申告して税金を収める個人には将来より高い生涯効用を約束し，低所得を申告して給付を受ける個人には将来より低い生涯効用を課すような仕組みを提供したとしましょう．一見するとこの仕組みは保険，あるいはリスク共有の形をとりますが，この仕組みを効率的に実施すると平均生涯効用が負の無限大に発散して「困窮化」と呼ばれる状況に陥ってしまいます．そこでは消費格差が無限に拡大していきます．

ここで個人の生涯効用は無限期間に渡る政府との契約の現在価値なので，将来の期待効用の現在価値を計算するときに用いる割引因子が将来予測に大きな影響を与えることが予想されます．割引因子に何か仮定を加えればこの問題を緩和できるのではないか，というのは自然な問いです．この問いに対する回答は次の先行研究から得られます．Thomas and Worrall (1990) や Carrasco et al.

(2019) は割引因子が 1 に極めて近ければ，最適な消費の再配分が可能であるこを示しています．割引因子がほぼ 1 であるとは，個人が将来消費を重視し現在の消費がほぼゼロまで減っても耐えられる状況を指します．しかし冒頭で述べたように日々の消費のために最低毎日 3 の所得が必要という状況においてこの仮定は非現実的です．Atkeson and Lucas (1992) は割引因子を 1 期先資源の価格とみなし，各個人は仲介者を通じて現在と将来の資源の取引を行うことができる競争市場をモデル化しました．彼らのモデルからは，このような割引因子を用いた競争市場の働きで効率的資源配分を実現するためには，完全情報が必要であるという結論が得られています．Phelan (1998) も似たような仲介者のいる状況を考え，将来の割引因子にこのような柔軟性があったとしても毎期の総移転額をゼロにバランスさせなければならない状況では所得申告を必要とする個人の平均消費は負の無限大になることをしめしました．

本研究は Marcet and Marimon (1992) の仕組みを上記の問題解決のために使います．この仕組みは割引率を変更して問題の軽減を図るのではなく，「同一個人の将来期へのリスク繰延」による問題解決を図ります．既存研究との違いは本稿の後半で詳しく述べます．

本研究の主要な結果は次のとおりです．本研究の提案する仕組みはそれ程難しくない条件下で所得配分の効率性と困窮化回避を同時に達成します．さらにこの仕組みの下では同一世代間の機会均等が常に維持されます．このような効率性と機会均等の両立が可能なのは，リスクを将来期へ移転できるためと言えます．しかしこの仕組みにも欠点があります．それは生涯効用の平均値が徐々に上昇していくことです．つまり政府による所得移転の収支は徐々に減少していきます．これは本研究の提案する仕組みの持続可能性に疑問を投げかける問題です．しかし本研究では定常人口社会のもとである一定条件を満たせばこの仕組みが持続可能であることも示しました．ここでの定常人口社会には Fujiwara-Greve and Okuno-Fujiwara (2009) のモデルを用いています．本研究の仕組を適用したこの定常人口社会の下では，すべての世代に自給自足より高い期待生涯効用を保証しながら，政府による所得移転の収支を非負に保ち続けることが可能です．したがって，本研究においては効率性と機会均等を両立する社会の実現可能性は否定されません．

本稿の構成は次のとおりです．第 2 章 では記号と用語を導入した上で本研究の仕組みを定義します．第 3 章では提案する仕組みが効率的であるという主要結果を示します．第 4 章では提案する仕組みの長期的な持続可能性を考察します．第 5 章では提案する仕組みが持続可能となる数値例を示します．第 6 章で提案する仕組みをベルマン方程式を用いて記述します．第 7 章で結論をまとめます．

2 モデル

モデルの説明をします．まず単位 $[0,1]$ 区間の連続的な点として存在する無限人の個人で構成される社会を考えます．この社会にはリスク中立的な政府が無限期間にわたって存続しているとします．各個人は全員リスク回避的であり，次期に生存している確率は $\alpha \in (0,1)$ です．各期には新たにリスク回避的な個人が出生してこの社会に参加し，結果として総人口は常に一定に保たれます．個人間の違いは出生期と死亡期のみです．各個人は割引因子 $r \in (0,1)$ を持ち，$\beta = \alpha r$ と定義します．すなわち，β は α と r の積です．Fujiwara-Greve and Okuno-Fujiwara (2009) も同様の定常人口モデルを囚人のジレンマゲームに用いています．

各個人の毎期の所得は確率的に変化するので，その所得変動を表現するために確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考え，$\{e_t\}_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ をこの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列として定義します．各確率変数 e_t は

t 期に個人が確率的に受け取る所得を表します．これらの確率変数として表される所得は独立同分布であり，

$$E := \{e^1, e^2, \ldots, e^M\}, \qquad e^i \in \mathbb{R}_+,\ e^i < e^j \text{ for } i < j,\ M \geq 2$$

という集合の元を値として取ります．以下の節では政府は 0 期から無限期間にわたって繰り返される移転メカニズム $\mathcal{M}$ を構築します．そこでは所得移転の列 $\{\tau_t\}_{t=0}^{\infty}$（$\tau_t \in \mathbb{R}$）と誘引制御の列 $\{\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$（$\lambda_t \in \mathbb{R}_{++}$）が重要な構成要素となります．

2.1 パレート最適移転メカニズム

この節では政府が個人の所得を完全に観察できると仮定します．そのような状況のことを所得情報が対称的といいます．この節ではある定数 $\lambda_0 > 0$ が与えられるとパレート効率的な移転価格を返すことのできる関数を導出します．この定数 $\lambda_0 > 0$ は次節以降で誘引を制御するのに使う状態変数として再定義することになります．

ある世代の 0 期に政府はその世代の個人の生涯効用を可能な限り大きくする効率的な移転メカニズムを検討します．ただし無制限な政府補助を許容することはできません．政府は純補助金 (高所得者からの収入と低所得者への支出の収支) の上限をあらかじめ設定したうえで次の問題を解きます．

$$(*) \qquad \begin{cases} \displaystyle\max_{\{\tau_t\}_{t=0}^{\infty}} (1-\beta)\, \mathbb{E}_0\Big[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\Big] \\ \text{subject to} \\ \displaystyle (1-\beta)\, \mathbb{E}_0\Big[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \tau_t\Big] \leq \text{Const}, \end{cases}$$

ここで $\mathbb{E}_0$ は 0 期時点の情報に基づく条件付き期待値のオペレータ、$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は個人の効用関数、$c_t = e_t + \tau_t$ 所得と移転所得の和からなり，出生期から数えて期 t の消費です．移転額 tau_t は通常高所得の場合負，低所得の場合正になります．効用関数 u は単調増加関数で $(u' > 0)$，凹関数 $(u'' < 0)$ であるとします．そして Inada 条件として知られる条件: $\lim_{c\to 0} u'(c) = +\infty,\ \lim_{c\to\infty} u'(c) = 0$ を満たすほか，上に有界であると仮定します．

上記の問題 $(*)$ のラグランジュ関数は次のように表されます．

$$\mathcal{L} = (1-\beta)\mathbb{E}_0\Big[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\Big] - \frac{1}{\lambda_0}\left(\text{Const} - (1-\beta)\mathbb{E}_0\Big[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \tau_t\Big]\right).$$

ここで $1/\lambda_0 > 0$ は未定乗数です．純補助金の上限の Const を明示しなくても，最適な移転所得の列 $\{\tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ は λ_0 が与えられれば一意に決まります．純補助金の上限 Const の値は最適な所得移転メカニズムにおける λ_0 の値を決めます．しかしここでは純補助金の上限の値 Const に対応する λ_0 の値を求めずに，代わりに λ_0 を純補助金の上限の値 Const を示すパラメータとして使います．ラグランジュ関数を問題 $(*)$ の目的関数として，制約式を取り除くことによって問題 $(*)$ は次のように書き換えられます．なお，以下の書き換えではラグランジュ関数に λ_0 を掛けて，Const を取り除く操作をしています．この操作をしても求める最適値は変わりません．

$$\max_{\{\tau_t\}_{t=0}^{\infty}} (1-\beta)\, \mathbb{E}_0\Big[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big\{\lambda_0\, u(c_t) - \tau_t\big\}\Big]. \tag{1}$$

一階条件より

$$u'(c_t) = \frac{1}{\lambda_0}, \qquad t \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

が得られ，最適消費と最適移転額は次のように求まります．

$$c_t = \big(u'\big)^{-1}\big(\lambda_0^{-1}\big), \qquad \tau_t = \big(u'\big)^{-1}\big(\lambda_0^{-1}\big) - e_t, \qquad t \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

最適消費は λ_0 によって決まる定数となっています．これはどの期間においても同じ消費量になることを示しています．一方最適移転額は実現した所得によって変動します．これは毎期の消費を一定に保つためです．これがリスク回避的な個人に対してのパレート最適な移転メカニズムです．

求められた最適消費と最適移転額から，各個人がこの移転メカニズムによって約束される生涯効用を表す関数 $v_1 : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ と，それに要する移転額の収支の期待値を表す関数 $v_2 : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が次のように求まります．与えられた初期値 $\lambda_0 > 0$ と 0 期に実現した所得 $e_0 \in E$ に対して，

$$\begin{aligned} v_1(\lambda_0, e_0) &:= (1-\beta)\,\mathbb{E}_0\Big[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)\Big] = u\big((u')^{-1}(\lambda_0^{-1})\big) =: \overline{v}_1(\lambda_0), \\ v_2(\lambda_0, e_0) &:= (1-\beta)\,\mathbb{E}_0\Big[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (-\tau_t)\Big]. \end{aligned}$$

関数 v_1 は λ_0 にのみ依存するので，λ_0 の関数と見ることができます．そこで $\overline{v}_1(\lambda_0)$ と表現することにします．$\overline{v}_1$ は λ_0 の単調増加関数であり，かつ全単射です．

本稿の 4 節では，世代間で合計した移転残高の期待値が非負になるように政府が λ_0 の値を調整する手順を示します．

転移メカニズムの最適解として得られた移転額は常に最適消費から観察された所得を引くことで求まるので，時間不変の移転関数として表すことができます．それを $\tau^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$ と書き，観察された所得 $x \in \mathbb{R}_+$ と $\lambda_0 > 0$ に対して

$$\tau^*(x \mid \lambda_0) = (u')^{-1}(\lambda_0^{-1}) - x$$

と定義します．また，最適移転関数 τ^* を用いた場合の $v_2(\lambda_t, e_t)$ の期待値を

$$\overline{v}_2(\lambda_t) := \mathbb{E}[(1-\beta)\mathbb{E}_t[\sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t}(-\tau^*(e_s|\lambda_s))]].$$

と定義します．

これらの記法は，次節で扱う「所得が私的情報である場合」にもそのまま用います．動的計画法の用語を使うと，そこでは λ_t を状態変数，τ^* を時間不変の制御関数として使います．動的計画法では一般に状態変数の推移の仕方に関する何等かの再帰的な制約条件の元で，時間不変の制御関数を用い，ある目的関数を最大化しようとします．その最大化問題を上記の政府の最適化問題を当てはめて記述すると次のようになります．制御関数の集合を $\mathcal{T}$ とおき，$\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$ を $\mathcal{T}$ の典型的な元とします．任意の t 期首に状態変数 λ_t で保証される個人の生涯効用は

$$J(\lambda_t, t, \tau) = (1-\beta)\,\mathbb{E}_t\Big[\sum_{k=t}^{\infty} \beta^{\,k-t}\, u\big(e_k + \tau(e_k \mid \lambda_t)\big)\Big], \quad \tau \in \mathcal{T}, \tag{2}$$

で与えられます．ここで $\mathbb{E}_t$ は期 t 時点の情報に基づく条件付き期待値のオペレータです．

そして動的計画法の計画者である政府は時間不変の最適制御関数を求めることを目指します．後ほど示すように，ある条件の下，$\tau^* \in \mathcal{T}$ は適切に選ばれた $\{\lambda_k\}_{k=t}^{\infty}$ の下で時間不変の最適制御関数となり，次のように無限期間の目的関数を最大にします．

$$J(\lambda_t, t, \tau^*) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} (1-\beta)\, \mathbb{E}_t\Big[\sum_{k=t}^{\infty} \beta^{\,k-t}\, u\big(e_k + \tau(e_k \mid \lambda_t)\big)\Big] \tag{3}$$

2.2 非対称情報下におけるパレート最適な移転メカニズム

所得が私的情報である場合，政府は各個人に対して所得を申告してもらう必要があります．一般に，移転する資金の列 $\{\tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ を決めるメカニズム Γ は，次に定義する逐次的な誘因整合性を満たさなければなりません．この定義のために，現在観測可能な状態を z で表します．一般に z は有限次元の状態変数ベクトルであってもよく，過去の観測履歴を含む場合や，再帰的な形で表される場合もあります．明日の観測可能な状態 z' の分布は，現在の状態 z と現在の消費水準 x によって決まるとします．各個人の現在期のペイオフを $\pi(x)$，メカニズム Γ の現在価値を $v(z)$ と書きます．

定義 1. (逐次的な誘因整合性，Marcet and Marimon 1992) メカニズム Γ が **逐次的インセンティブ整合的** であるとは，任意の状態 z に対して

$$v(z) = (1-\beta)\,\pi(x) + \beta\mathbb{E}_{(x,z)}[v(z')] \;\geq\; (1-\beta)\,\pi(\tilde{x}) + \beta\mathbb{E}_{(\tilde{x},z)}[v(z')]$$

が成り立つことをいいます．ここで $\mathbb{E}_{(x,z)}$ は条件 (x,z) が与えられたときの条件付き期待値を表します．

さらに，以下の概念に基づいてメカニズムの効率性を評価します．

定義 2. (逐次的に効率的なメカニズム，Marcet and Marimon 1992) メカニズム Γ が **逐次的に効率的** であるとは，Γ が逐次的に誘因整合的であり，かつ他のどの逐次的に誘因整合的メカニズムによってもパレート改善されないことをいいます．

政府は以上を考慮したうえで，しかし困窮化を招くことが知られているため，対称情報下で最適な移転関数 τ^* を変更したくありません．政府は別のアプローチとして，各期にラグランジュ関数の未定乗数 λ を調整する方法を取ります．対称情報下で未定乗数 λ と個人の生涯効用は全単射で結ばれているので，同一視することができます．将来の未定乗数 λ の調整は将来の生涯効用の調整に他なりません．この調整が正直な申告を促す誘因となり得ます．そこで以下では λ のことを効用制御変数と呼びます．ある期に λ が与えられると，政府は生涯効用水準 $\overline{v}_1(\lambda)$ を保証し，次期の効用制御変数は，当期の λ と報告所得を考慮して更新します．個人が t 期に所得 e を正直に申告した場合，その期からの生涯効用は

$$\overline{v}_1(\lambda) = \mathbb{E}\Big[(1-\beta)\, u\big(e + \tau^*(e \mid \lambda)\big) + \beta\, \overline{v}_1\big(\lambda'(e \mid \lambda)\big)\Big], \tag{4}$$

で与えられます．ここで $\lambda'(\cdot \mid \lambda) : E \to \mathbb{R}_{++}$ は次期の効用制御変数です．式 (4) を満たす λ' であれば，$\mathbb{E}[\overline{v}_1(\lambda'(e \mid \lambda))] = \overline{v}_1(\lambda)$ が成り立ち，政府の $\overline{v}_1(\lambda)$ を保証する約束は守られます．さらに，現在の効用制御変数 λ が与えられたときに，更新後の効用制御変数 λ' が次の誘因整合性制約を満

たせば，真実の申告が促されます：

$$
\begin{aligned}
&(1-\beta)\,u\bigl(e+\tau^*(e\mid\lambda)\bigr)+\beta\,\overline{v}_1\bigl(\lambda'(e\mid\lambda)\bigr)\\
&\qquad\qquad\geq\ (1-\beta)\,u\bigl(e+\tau^*(\tilde{e}\mid\lambda)\bigr)+\beta\,\overline{v}_1\bigl(\lambda'(\tilde{e}\mid\lambda)\bigr)\quad\forall e,\tilde{e}\in E.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

上記の (4) と (5) の両方を満たす効用制御変数 λ' は，Marcet and Marimon (1992) が提示した λ メカニズムを応用することで構成できます．ただし，ここでいう「構成可能」とは，更新後の効用制御変数が次期の期待効用水準を各個人の効用関数の上限未満に抑えるような λ' が存在する場合を指します．具体的には，各個人の効用関数の上限を

$$
S\ =\ \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\ u(x)
$$

とおきます．ある $\lambda>0$ と報告所得 e が与えられたときに，後述する理由から保証したい効用水準は

$$
\overline{v}_1(\lambda)+\lambda^{-1}\beta^{-1}\bigl(v_2(\lambda,e)-\overline{v}_2(\lambda)\bigr)
$$

です．報告所得の大きさにかかわらずこの水準が個人の効用関数の上限を超えない，すなわち

$$
\overline{v}_1(\lambda)+\lambda^{-1}\beta^{-1}\bigl(v_2(\lambda,e^M)-\overline{v}_2(\lambda)\bigr)\ <\ S
$$

が成り立つならば，更新後の効用制御変数 λ' を

$$
\lambda'(e\mid\lambda)\ =\ \overline{v}_1^{-1}\Bigl(\overline{v}_1(\lambda)+\lambda^{-1}\beta^{-1}\bigl(v_2(\lambda,e)-\overline{v}_2(\lambda)\bigr)\Bigr),
\tag{6}
$$

と定義します．これは前期の取引を時期に逆取引し，それを時期の λ に反映する処理を行ったものです．(6) の右辺のカッコ内の項は $v_2(\lambda,e)-\overline{v}_2(\lambda)=(1-\beta)\bigl(e-\mathbb{E}[e_t]\bigr)$ であることに注意すると，報告所得 $e\in E$ が平均所得 $\mathbb{E}[e_t]$ を上回る場合には，次期の効用制御変数 λ' が高く設定され，逆に報告所得 e が平均所得を下回る場合には，次期の効用制御変数が低く設定されることがわかります．換言すると，個人の社会への貢献度を平均的な譲渡額をどれだけ上回ったかで評価していると見ることもできます．

また，

$$
u\bigl(e+\tau^*(e\mid\lambda)\bigr)=u\bigl((u')^{-1}(\lambda^{-1})\bigr)=\overline{v}_1(\lambda)
$$

であるため，(6) で定義した λ' は生涯効用水準の保証を約束する制約 (4) を満たします：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\bigl[(1-\beta)\,u\bigl(e+\tau^*(e\mid\lambda)\bigr)+\beta\,\overline{v}_1\bigl(\lambda'(e\mid\lambda)\bigr)\bigr]&=\mathbb{E}\bigl[\overline{v}_1(\lambda)+\lambda^{-1}\bigl(v_2(\lambda,e)-\overline{v}_2(\lambda)\bigr)\bigr]\\
&=\overline{v}_1(\lambda).
\end{aligned}
$$

さらに，対称情報下の政府の問題 (1) において $\lambda_0=\lambda$ としたときの政府の目的関数

$$
\lambda\Bigl[(1-\beta)\,u\bigl(e+\tau^*(e\mid\lambda)\bigr)+\beta\,\overline{v}_1(\lambda)\Bigr]+v_2(\lambda,e)
$$

は，真実の報告所得 e で最大化されるように設計されています．したがって，任意の $e,\tilde{e}\in E$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\lambda\Bigl[(1-\beta)\,u\bigl(e+\tau^*(e\mid\lambda)\bigr)+\beta\,\overline{v}_1(\lambda)\Bigr]+v_2(\lambda,e)-\overline{v}_2(\lambda)\\
&\qquad\qquad\geq\lambda\Bigl[(1-\beta)\,u\bigl(e+\tau^*(\tilde{e}\mid\lambda)\bigr)+\beta\,\overline{v}_1(\lambda)\Bigr]+v_2(\lambda,\tilde{e})-\overline{v}_2(\lambda)
\end{aligned}
$$

が成り立ちます．これにより誘因整合性制約 (5) が成立することが分かります：

$$\begin{aligned}\lambda\big[(1-\beta)u(e+\tau^*(e|\lambda))+\beta\overline{v}_1(\lambda)\big]+v_2(\lambda,e)-\overline{v}_2(\lambda)&\\ =\lambda\big[(1-\beta)u(e+\tau^*(e|\lambda))+\beta\overline{v}_1(\lambda'(e|\lambda))\big]&\\ \geq\lambda[(1-\beta)u(e+\tau^*(\tilde{e}|\lambda))+\beta\overline{v}_1(\lambda)]+v_2(\lambda,\tilde{e})-\overline{v}_2(\lambda)&\\ =\lambda\big[(1-\beta)u(e+\tau^*(\tilde{e}|\lambda))+\beta\overline{v}_1(\lambda'(\tilde{e}|\lambda))\big]&\quad\text{for } e,\tilde{e}\in E.\end{aligned}$$

これで更新後の効用制御変数 λ' を真実の申告を誘因整合的に促すように設計できました．

一方，ある効用制御変数 λ に対して (6) で定義される λ' が，次期の期待効用水準を個人の効用関数の上限 S 以上にしてしまうような所得 $\hat{e}\in E$ が存在する場合には，政府は約束したい生涯効用水準に最も近い生涯効用水準を保証するような λ' を設定します．すなわち，

$$\overline{v}_1(\lambda)+\lambda^{-1}\beta^{-1}\big(v_2(\lambda,\hat{e})-\overline{v}_2(\lambda)\big)\ \geq\ S$$

となる $\hat{e}\in E$ があるときは，報告所得 $e\in E$ に対して

$$\lambda'(e\mid\lambda)=\overline{v}_1^{-1}\Big(\overline{v}_1(\lambda)+\lambda^{-1}\beta^{-1}\big(v_2\big(\lambda,\min\{e,\overline{e}_\lambda\}\big)-\mathbb{E}_{\tau^*}\big[v_2\big(\lambda,\min\{e_t,\overline{e}_\lambda\}\big)\big]\big)\Big),\tag{7}$$

と定義します．ここで $\mathbb{E}_{\tau^*}$ は

$$\mathbb{E}_{\tau^*}\left[v_2(\lambda,\min\{e,\overline{e}_\lambda\})\right]:=(1-\beta)\mathbb{E}\left[-\tau^*(\min\{e_t,\overline{e}_\lambda\}|\lambda)+\sum_{s=t+1}^{\infty}\beta^{s-t}(-\tau^*(e_s|\lambda_s))\right]$$

$\overline{e}_\lambda$ は

$$\overline{e}_\lambda=\arg\max_{e'\in E}\Big(v_2(\lambda,e')-\mathbb{E}_{\tau^*}\big[v_2\big(\lambda,\min\{e_t,e'\}\big)\big]\Big)$$

subject to

$$\overline{v}_1(\lambda)+\frac{1}{\lambda\beta}\Big(v_2(\lambda,e')-\mathbb{E}_{\tau^*}\big[v_2\big(\lambda,\min\{e_t,e'\}\big)\big]\Big)<S$$

と定義しています．

この調整によって，当期 t の移転額も変更されますが，(7) の再帰的な関係は次の誘因整合性制約を依然として満たします：

$$\begin{aligned}(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\min\{e,\overline{e}_\lambda\}\mid\lambda)\big)+\beta\,\overline{v}_1\big(\lambda'(e\mid\lambda)\big)&\\ \geq(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\min\{\tilde{e},\overline{e}_\lambda\}\mid\lambda)\big)+\beta\,\overline{v}_1\big(\lambda'(\tilde{e}\mid\lambda)\big),&\quad\text{for } e,\tilde{e}\in E.\end{aligned}\tag{8}$$

その理由は，(8) 式にある転移 $\tau^*\big(\min\{e,\overline{e}_\lambda\}\mid\lambda\big)$ は $\lambda=\lambda_0$ として政府の問題 (1) を

$$\tau(e_t)\ \geq\ (u')^{-1}(\lambda^{-1})-\overline{e}_\lambda\quad t\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

という制約付きで解いたものであるためです。しきい値 $\overline{e}_\lambda$ を超える所得を得た個人に対しては，政府への移転が定数となるので，正直な申告でも虚偽申告でも効用が変わらず，無差別となります。

政府の生涯効用水準の保証を約束する制約についても，(8) の左辺を期待値で取ると約束された生涯効用水準 $\overline{v}_1(\lambda)$ 以上になるため成立します：

$$\mathbb{E}\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\min\{e,\overline{e}_\lambda\}\mid\lambda)\big)+\beta\,\overline{v}_1(\lambda')\Big]\ \geq\ \overline{v}_1(\lambda).$$

なお，(7) の定義は (6) の拡張形になっているため，(6) が適用できる場合にも同じ式を用いることができます。以上を踏まえ，本稿ではこのように構成された更新ルールと転移関数を組み合わせたメカニズムを定義します。

定義 3. 再帰式 (7) を満たす効用制御変数列 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ と，それに対応する転移 $\tau^*\bigl(\min\{e_t, \overline{e}_{\lambda_t}\} \mid \lambda_t\bigr)$ の組によって表されるメカニズムを**期間間移転メカニズム** $\mathcal{M}$ といいます.

次に示す補題が述べるように，任意の $\lambda > 0$ について最適消費 $(u')^{-1}(\lambda^{-1})$ における Arrow－Pratt 型絶対リスク回避度 が十分小さければ，効用制御変数列 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は常に再帰式 (6) で定義できます.

補題 1. 効用制御変数列 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を常に (6) で定義できることの十分条件は

$$-\frac{u''\bigl((u')^{-1}(\lambda^{-1})\bigr)}{u'\bigl((u')^{-1}(\lambda^{-1})\bigr)} < \frac{\beta}{(1-\beta)\bigl(e^M - \mathbb{E}[e_t]\bigr)}, \qquad \forall\lambda > 0. \tag{9}$$

Proof. 実数値関数 F を次のように定義します.

$$F(\lambda) = \overline{v}_1(\lambda) + \lambda^{-1}\beta^{-1}\bigl(v_2(\lambda, e^M) - \overline{v}_2(\lambda)\bigr) \quad \text{for } \lambda > 0.$$

関数 F がすべての $\lambda > 0$ について S より小さいことを示せば十分です.

効用関数 u は連続で上に有界かつ Inada 条件を満たすので,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \overline{v}_1(\lambda) = u\Bigl(\lim_{\lambda\to\infty}(u')^{-1}(\lambda^{-1})\Bigr) \le S, \quad \lim_{\lambda\to\infty}(u')^{-1}(\lambda^{-1}) = \infty.$$

したがって

$$\lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \overline{v}_1(\lambda) = S$$

が成り立ちます.

条件 (9) が成立すれば，任意の $\lambda > 0$ で $F'(\lambda) > 0$ となり，F は λ に対して単調増加になります．よって $F(\lambda) < S$ がすべての $\lambda > 0$ で成り立ち，補題は証明されます. □

条件 (9) が満たされない場合，例えば個人の効用関数が一定の絶対リスク回避度を持ち，しかもその値が $\beta/\bigl((1-\beta)(e^M - \mathbb{E}[e_t])\bigr)$ より大きいときには，効用制御変数 λ_t が (6) ではなく (7) により定義される局面が生じることがあります．条件 (9) が満たされない場合 $F(\lambda)$ は λ の減少関数であり，$\lim_{\lambda\to 0} F(\lambda) = \infty$ なので，$F(\lambda) \ge S$ となる閾値 $\overline{\lambda}$ が存在するはずです.

期間間移転メカニズム $\mathcal{M}$ は，各 λ_t が (6) によって定義されている場合でも (7) によって定義されている場合でも，逐次的な誘因整合性を満たします．さらに，効用制御変数列 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ が常に (6) で定義されるときは，Marcet and Marimon (1992) の λ メカニズムと同様に $\mathcal{M}$ は逐次的に効率的になります.

命題 1. 期間間移転メカニズム $\mathcal{M}$ は逐次的に誘因整合的である．さらに，不等式 (9) が成立する場合，$\mathcal{M}$ は逐次的に効率的である.

Proof. まず，効用制御変数列 $\{\lambda_t\}$ が全期間にわたって (6) により定義されている場合について，Marcet and Marimon (1992) によって命題の証明が示されていますが，完全性を期すため，以下ではすべての λ_t が (6) で定義できる場合を含めてすべての場合を証明します.

■逐次的な誘因整合性

(i)　$\boldsymbol{F(\lambda_t) < S}$ の場合

$\lambda_t > 0$ で $F(\lambda_t) < S$ が成立しているとき，

$$\begin{aligned}
&\lambda_t\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(e \mid \lambda_t)\big)+\beta\,\overline{v}_1\big(\lambda_{t+1}(e \mid \lambda_t)\big)\Big]\\
&\quad\overset{(6)}{=}\lambda_t\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(e \mid \lambda_t)\big)+\beta\,\overline{v}_1(\lambda_t)\Big]+v_2(\lambda_t,e)-\overline{v}_2(\lambda_t)\\
&\quad\geq\lambda_t\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\tilde{e} \mid \lambda_t)\big)+\beta\,\overline{v}_1(\lambda_t)\Big]+v_2(\lambda_t,\tilde{e})-\overline{v}_2(\lambda_t)\\
&\quad=\lambda_t\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\tilde{e} \mid \lambda_t)\big)+\beta\,\overline{v}_1\big(\lambda_{t+1}(\tilde{e} \mid \lambda_t)\big)\Big],\qquad e,\tilde{e}\in E.
\end{aligned}$$

最後の不等式は与えられた λ_t の下で $\lambda_t\,\overline{v}_1(\lambda_t)+v_2(\lambda_t,e)$ が対称情報下の政府の問題 (1) を最適化することに由来します．

(ii)　$\boldsymbol{F(\lambda_t) \geq S}$ の場合

$\lambda_t > 0$ で $F(\lambda_t) \geq S$ が成立する場合には，(7) により

$$\begin{aligned}
&\lambda_t\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\min\{e,\overline{e}_{\lambda_t}\} \mid \lambda_t)\big)+\beta\,\overline{v}_1\big(\lambda_t'(e \mid \lambda_t)\big)\Big]\\
&\quad\overset{(7)}{=}\lambda_t\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\min\{e,\overline{e}_{\lambda_t}\} \mid \lambda_t)\big)+\beta\,\overline{v}_1(\lambda_t)\Big]\\
&\qquad\qquad\qquad+v_2\big(\lambda_t,\min\{e,\overline{e}_{\lambda_t}\}\big)-\mathbb{E}_{\tau^*}\big[v_2\big(\lambda_t,\min\{e_t,\overline{e}_{\lambda_t}\}\big)\big]\\
&\quad\geq\lambda_t\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\min\{\tilde{e},\overline{e}_{\lambda_t}\} \mid \lambda_t)\big)+\beta\,\overline{v}_1(\lambda_t)\Big]\\
&\qquad\qquad\qquad+v_2\big(\lambda_t,\min\{\tilde{e},\overline{e}_{\lambda_t}\}\big)-\mathbb{E}_{\tau^*}\big[v_2\big(\lambda_t,\min\{e_t,\overline{e}_{\lambda_t}\}\big)\big]\\
&\quad=\lambda_t\Big[(1-\beta)\,u\big(e+\tau^*(\min\{\tilde{e},\overline{e}_{\lambda_t}\} \mid \lambda_t)\big)+\beta\,\overline{v}_1\big(\lambda_t'(\tilde{e} \mid \lambda_t)\big)\Big],\qquad e,\tilde{e}\in E.
\end{aligned}$$

ここでも最後の不等式は，$\tau^*\big(\min\{e,\overline{e}_{\lambda_t}\} \mid \lambda_t\big)$ が問題 (1) を $\tau_t \geq (u')^{-1}(\lambda_0^{-1})-\overline{e}_{\lambda_0}$ の制約下で最適化することから得られます．以上により $\mathcal{M}$ は逐次的に誘因整合的です．

■逐次的効率性

不等式 (9) が成立するとき，補題 1 により $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は常に (6) で定義されます．逐次的な誘因整合性が満たされているため各期に正直な報告がなされ，かつ $\mathcal{M}$ における移転関数 τ^* は各期の問題 (1) の解となっているので，$\mathcal{M}$ はパレート最適です．

次に，$\mathcal{M}$ が逐次的に誘因整合的ないかなる他のメカニズムからもパレート改善されないことを示します．仮にある逐次的に誘因整合的メカニズム Γ が所得状態 e で $\mathcal{M}$ をパレート優越するとします．Γ により達成される現在価値を (v_1^*,v_2^*) と書き，$\lambda_0=\overline{v}_1^{-1}(v_1^*)$ と置きます．条件 (9) が任意の $\lambda>0$ で成立するので，この λ_0 は $F(\lambda_0)<S$ を満たします．$\mathcal{M}$ を初期条件 (λ_0,e) で適用すれば，両メカニズムは個人に同じ現在価値を与えるはずですが，Γ が $\mathcal{M}$ をパレート改善するには $v_2^*>v_2(\lambda_0,e)$ が要請されます．しかし $\mathcal{M}$ は各期でパレート最適となるよう設計されているため，これは矛盾します．したがって，$\mathcal{M}$ は逐次的に効率的です．　□

命題 1 は，条件 (9) が成り立つ場合に限ってメカニズム $\mathcal{M}$ が逐次的に効率的であることを示しました．しかし，効用関数が上に有界であるという仮定を取り除けば，この制限を緩和できる可能性があります．上に有界であるという仮定は命題 2 を保証するための**十分条件** ではありますが，**必要条件** ではありません．

3　個人から見た期間間移転メカニズム

政府のメカニズム $\mathcal{M}$ を用いるアプローチは，**困窮化** をうまく回避します．すなわち，$\mathcal{M}$ において各個人に約束される生涯効用はほとんど至る所で収束し，その期待値は有限となります．これを確認するために，生涯効用の列 $\{\overline{v}_1(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列として再解釈します．具体的には以下のように再帰的に定義します．

まず生涯効用 $\overline{v}_1(\lambda_1)$ を確率変数 $\overline{v}_1(\lambda_1(e_0(\cdot) \mid \lambda_0))$ と解釈し，$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ をこの確率変数が生成する最小の σ-集合体として定めます：

$$\mathcal{F}_1 = \bigl\{\overline{v}_1(\lambda_1)^{-1}(B) \;\bigm|\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\bigr\},$$

ここで

$$\overline{v}_1(\lambda_1)^{-1}(B) = \bigl\{\omega \in \Omega \;\bigm|\; \overline{v}_1\bigl(\lambda_1(e_0(\omega) \mid \lambda_0)\bigr) \in B\bigr\}.$$

このとき $\overline{v}_1(\lambda_1)$ は $\mathcal{F}_1$ 可測であり，

$$\overline{v}_1(\lambda_1) : (\Omega, \mathcal{F}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

となります．

次に $\overline{v}_1(\lambda_n)$ を確率変数 $\overline{v}_1(\lambda_n(e_{n-1}(\cdot) \mid \lambda_{n-1}))$ と解釈し，$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ を $\{\overline{v}_1(\lambda_i)\}_{i=1}^n$ の積が生成する最小の σ-集合体として定義します：

$$\mathcal{F}_n = \Bigl\{\bigl(\overline{v}_1(\lambda_1) \times \cdots \times \overline{v}_1(\lambda_n)\bigr)^{-1}(B) \;\Bigm|\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\Bigr\},$$

ここで

$$\bigl(\overline{v}_1(\lambda_1) \times \cdots \times \overline{v}_1(\lambda_n)\bigr)^{-1}(B) = \Bigl\{\omega \in \Omega \;\Bigm|\; \bigl(\overline{v}_1(\lambda_1(e_0(\omega) \mid \lambda_0)), \ldots, \overline{v}_1(\lambda_n(e_{n-1}(\omega) \mid \lambda_{n-1}))\bigr) \in B\Bigr\}.$$

このとき $\overline{v}_1(\lambda_n)$ は $\mathcal{F}_n$ 可測であり，

$$\overline{v}_1(\lambda_n) : (\Omega, \mathcal{F}_n) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

となります．

命題 2. メカニズム $\mathcal{M}$ で約束される個人の生涯効用列 $\{\overline{v}_1(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は可積分な確率変数に収束します．

Proof. まず $\{\overline{v}_1(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ がマルチンゲールであることを示します．メカニズム $\mathcal{M}$ の効用制御変数列 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は再帰式 (7) を満たすため，実現値 $\overline{v}_1(\lambda_{n-1})(\omega)$ が与えられると

$$\mathbb{E}\bigl[\overline{v}_1(\lambda_n) \mid \overline{v}_1(\lambda_{n-1})(\omega)\bigr] = \overline{v}_1(\lambda_{n-1})(\omega)$$

が成り立ちます．したがって，任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\int_B \mathbb{E}\bigl[\overline{v}_1(\lambda_n) \mid \overline{v}_1(\lambda_{n-1})(\omega)\bigr]\, dP_{\overline{v}_1(\lambda_{n-1})} = \int_B \overline{v}_1(\lambda_{n-1})(\omega)\, dP_{\overline{v}_1(\lambda_{n-1})},$$

また

$$\begin{aligned}\int_B \mathbb{E}\big[\overline{v}_1(\lambda_n) \mid \overline{v}_1(\lambda_{n-1})(\omega)\big]\, dP_{\overline{v}_1(\lambda_{n-1})} &= \int_{\{\overline{v}_1(\lambda_{n-1})(\omega)\in B\}} \overline{v}_1(\lambda_n)\, dP \\ &= \int_{\{\overline{v}_1(\lambda_{n-1})(\omega)\in B\}} \overline{v}_1(\lambda_{n-1})\, dP.\end{aligned}$$

最後の等式から，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{E}[\overline{v}_1(\lambda_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \overline{v}_1(\lambda_{n-1})\, a.e.\,[P]$ が成り立つと言えるので，生涯効用の列 $\{\overline{v}_1(\lambda_n)\}$ はマルチンゲールであることが分かります．

次に $\sup_n \overline{v}_1(\lambda_n)^+ < \infty$ であることを示します. (6) と (7) から任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\overline{v}_1(\lambda_n) \le S$ が成立するため，

$$\sup_n \overline{v}_1(\lambda_n)^+ < \infty$$

となります．

生涯効用の列 $\{\overline{v}_1(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ がマルチンゲールであり，$\sup_n \mathbb{E}[\overline{v}_1(\lambda_n)^+] \le \sup_n \overline{v}_1(\lambda_n)^+ < \infty$ が成立するので，サブマルチンゲール収束定理より，可積分な確率変数 v^∞ が存在して

$$\overline{v}_1(\lambda_n) \;\longrightarrow\; v^\infty \quad \text{a.e.}$$

が得られます． □

命題 2 の証明が示すとおり，メカニズム $\mathcal{M}$ は「来期の生涯効用に来期の生涯効用を賭ける公正なギャンブル」のように機能します．各期における生涯効用は確率変数であり，その列はマルチンゲールを形成します．賭けを行った時点から見た各個人の期待生涯効用は変化しないという意味でこのメカニズムは公正です．

4　政府から見た期間間移転メカニズム

もっとも，個人の生涯効用が有限な期待値を持つ確率変数に収束するだけでは，メカニズム $\mathcal{M}$ の**持続可能性**は保証されません．長期的に見て各世代に対する政府予算が単調に減少していくと予見されるからです。次の補題で示すように，その兆候は平均移転額の推移に現れます．

n 期前に出生した個人に対する平均移転額を $\overline{\tau}_n$ と書くと，

$$\overline{\tau}_n = \mathbb{E}\big[u^{-1}\big(\overline{v}_1(\lambda_n)\big)\big] - \mathbb{E}[e_n], \qquad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

と表されます．

補題 2. 各世代に対する政府からの平均移転額 $\{\overline{\tau}_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は単調増加列である．

Proof. まず $n=1$ の場合を考えます．$n=1$ については $\mathbb{E}\big[\overline{v}_1(\lambda_1(e_0 \mid \lambda_0))\big] = \overline{v}_1(\lambda_0)$ が成り立ち，u^{-1} は凸関数であるため Jensen の不等式より

$$\begin{aligned}\overline{\tau}_1 &= \mathbb{E}\big[u^{-1}\big(\overline{v}_1(\lambda_1(e_0 \mid \lambda_0))\big)\big] - \mathbb{E}[e_1] \\ &\ge u^{-1}\big(\overline{v}_1(\lambda_0)\big) - \mathbb{E}[e_0] = \overline{\tau}_0.\end{aligned}$$

$n > 1$ の場合も，u^{-1} が凸関数であることから Jensen の不等式を用いて次のとおり示せます：

$$\begin{aligned}\overline{\tau}_{n-1} &= \mathbb{E}\big[u^{-1}\big(\overline{v}_1(\lambda_{n-1})\big)\big] - \mathbb{E}[e_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}\Big[u^{-1}\Big(\mathbb{E}\big[\overline{v}_1(\lambda_n) \mid \overline{v}_1(\lambda_{n-1})\big]\Big)\Big] - \mathbb{E}[e_{n-1}] \\ &\leq \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[u^{-1}\big(\overline{v}_1(\lambda_n)\big) \ \Big| \ \overline{v}_1(\lambda_{n-1})\Big]\Big] - \mathbb{E}[e_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}\big[u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_n))\big] - \mathbb{E}[e_n] = \overline{\tau}_n, \qquad \text{for } n = 2, 3, \ldots.\end{aligned}$$

□

補題 2 の証明から分かるように，平均移転額 $\{\overline{\tau}_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ が単調に増加していくのは，期をまたいでリスクが存在しても各期の期待生涯効用を前期と同じ水準に保つために追加的なコストが発生するからです．

効用制御変数の初期値 λ_0 が与えられたとき，第 t 期における政府の**期待収支**を $g(t, \lambda_0)$ と書きます．各個人が次期に生存している確率は $\alpha \in (0, 1)$ であり，第 1 期以降は毎期 $(1 - \alpha)$ 区間の次世代の連続体が出生すると仮定します．このとき $g(t, \lambda_0)$ は

$$\begin{aligned}g(t, \lambda_0) &= \alpha^t(-\overline{\tau}_t) + \alpha^{t-1}(1 - \alpha)(-\overline{\tau}_{t-1}) + \cdots + \alpha(1 - \alpha)(-\overline{\tau}_1) + (1 - \alpha)(-\overline{\tau}_0) \\ &= \sum_{k=1}^{t} \alpha^k \big(\overline{\tau}_{k-1} - \overline{\tau}_k\big) - \overline{\tau}_0.\end{aligned}$$

メカニズム $\mathcal{M}$ が**持続可能**であるためには，各期の政府収支が非負でなければなりません．次の命題が示すように，2 次のテイラー近似を用いれば，所得分布が対称である場合には（i）効用関数 u の絶対リスク回避度が消費に対して減少関数である，（ii）効用関数 u の絶対リスク回避度の絶対リスク回避度が効用関数の逆関数 u^{-1} の絶対リスク回避度より小さい，（iii）効用制御変数の初期値 λ_0 が不等式 $(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)\alpha/(1 - \alpha) \leq -\overline{\tau}_0$ を満たすように設定されている，という条件が十分条件になります．

命題 3. 次を仮定します：

(i) 所得分布が対称である，

(ii) $-u''/u'$ は減少関数である，

(iii) $(-u''/u') \circ u^{-1}$ は凹関数である（同値的に次が成り立つ）

$$\frac{\big(-\frac{u''}{u'}\big)''(u^{-1}(y))}{-\big(-\frac{u''}{u'}\big)'(u^{-1}(y))} \leq \frac{(u^{-1})''(y)}{(u^{-1})'(y)},$$

(iv) $\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)/(1 - \alpha) \leq -\overline{\tau}_0$.

このとき，*2* 次のテイラー多項式近似で評価すると

$$g(t, \lambda_0) \geq 0, \qquad \forall t \in \mathbb{N}.$$

命題 3 の証明には，次の補題が必要になります．

補題 3. 命題 *3* の仮定 *(i)*，*(ii)*，*(iii)* が成り立つとき，*2* 次のテイラー近似で評価した $\overline{\tau}_n - \overline{\tau}_{n-1}$ は単調減少列になります．

Proof. まず効用制御変数列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ が (6) によって定義できる場合を考えます．効用制御変数 $\lambda_{n-1}>0$ と所得 $e\in E$ が与えられると，対応する移転額は 3 次のテイラー展開により

$$
\begin{aligned}
&u^{-1}\big(\overline{v}_1(\lambda_n(e\mid\lambda_{n-1}))\big)-u^{-1}\big(\overline{v}_1(\lambda_{n-1})\big)\\
&\qquad=\frac{\Delta_{n-1}}{u'\big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1}))\big)}-\frac{1}{2!}\frac{u''\big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1}))\big)}{u'\big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1}))\big)^3}\Delta_{n-1}^2\\
&\qquad\quad+\frac{1}{3!}\left(-\frac{u'''\big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1}))\big)}{u'\big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1}))\big)^4}+\frac{3\,u''\big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1}))\big)^2}{u'\big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1}))\big)^5}\right)\Delta_{n-1}^3\\
&\qquad\quad+h_3\big(\overline{v}_1(\lambda_n(e\mid\lambda_{n-1}))\big)\Delta_{n-1}^3,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

となります．ここで

$$
\Delta_{n-1}=\frac{(1-\beta)\big(e-\mathbb{E}[e_n]\big)}{\beta\,\lambda_{n-1}}
$$

であり，$h_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\lim_{\Delta_{n-1}\to 0}h_3(\overline{v}_1(\lambda_n(e\mid\lambda_{n-1})))=0$ を満たす関数です．

式 (10) の両辺の期待値を取ると，$\overline{\tau}_n-\overline{\tau}_{n-1}$ が次のように求まります．

$$
\overline{\tau}_n-\overline{\tau}_{n-1}=\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2!}\Big(-\frac{u''(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1})))}{u'(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1})))}\Big)\Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big)^2\mathrm{Var}[e_n]\Big]+o(\Delta_{n-1}^3).
$$

上記の計算において，所得分布が対称であることから式 (10) の右辺第 3 項は期待値を取ることで相殺されてゼロになっています．さらに $(-u''/u')\circ u^{-1}$ が凹関数であるという仮定 (iii) と Jensen の不等式により

$$
\mathbb{E}\Big[-\frac{u''}{u'}\Big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1}))\Big)\Big]\geq\mathbb{E}\Big[-\frac{u''}{u'}\Big(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_n))\Big)\Big]
$$

が成り立つので，$\{\overline{\tau}_n-\overline{\tau}_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の 3 次近似は単調減少列になります．

次に，λ_{n-1} が (7) で定義される場合も同様に議論できることを示します．(10) の Δ_{n-1} を

$$
\overline{\Delta}_{n-1}=\frac{(1-\beta)\big(\min\{e,\overline{e}_{\lambda_{n-1}}\}-\mathbb{E}[\min\{e,\overline{e}_{\lambda_{n-1}}\}]\big)}{\beta\,\lambda_{n-1}}
$$

に置き換えます．$\overline{e}_{\lambda_{n-1}}$ 以下の条件付き所得の分布は対称でないため，期待値をとった際に 3 次の項が残ります．2 次のテイラー近似により $\overline{\tau}_n-\overline{\tau}_{n-1}$ は

$$
\mathbb{E}\Big[\frac{1}{2!}\Big(-\frac{u''(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1})))}{u'(u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_{n-1})))}\Big)\Big(\frac{1-\beta}{\beta}\Big)^2\mathrm{Var}\big[\min\{e,\overline{e}_{\lambda_{n-1}}\}\big]\Big]+o(\overline{\Delta}_{n-1}^2)
$$

となります．同様の議論により，2 次のテイラー近似で評価した $\{\overline{\tau}_n-\overline{\tau}_{n-1}\}$ も単調減少列であることが示され，証明は完了します． □

以下に命題 3 の証明を示します．

Proof. 補題 3 より，2 次の多項式近似を用いて次のように書くことができます：

$$
\overline{\tau}_n-\overline{\tau}_{n-1}\leq\overline{\tau}_1-\overline{\tau}_0\quad\text{for } n\in\mathbb{N}.
$$

したがって以下の不等式が成立します：

$$
\begin{aligned}
g(t,\lambda_0)&=\sum_{k=1}^{t}\alpha^k(\overline{\tau}_{k-1}-\overline{\tau}_k)-\overline{\tau}_0\\
&\geq\alpha\cdot\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha}(\overline{\tau}_0-\overline{\tau}_1)-\overline{\tau}_0.
\end{aligned}
$$

最後の項が正である条件は、

$$-\overline{\tau}_0 \geq \frac{\alpha(1-\alpha^t)}{1-\alpha}(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)$$

であり，任意の t で $g(t, \lambda_0) \geq 0$ となる十分条件は $\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)/(1-\alpha) \leq -\overline{\tau}_0$ となります． □

以下の系は命題 3 で指定された初期条件 $\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)/(1-\alpha) \leq -\overline{\tau}_0$ を満たす λ_0 の直感的な十分条件を 2 次の多項式近似を用いて示しています．

系 1. 命題 *3* における条件 $\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)/(1-\alpha) \leq -\overline{\tau}_0$ の成り立つ十分条件は，*2* 次の多項式近似で以下のとおりとなります．初期の効用制御変数 λ_0 が次の不等式を満たす場合：

$$\lambda_0(\overline{v}_1(\lambda_E) - \overline{v}_1(\lambda_0)) \geq \sqrt{\frac{(1-\alpha r)^2}{\alpha r^2(1-\alpha)}\mathrm{Var}[e_t]}, \tag{11}$$

ここで $\lambda_E = 1/(u'(u(\mathbb{E}[e_t])))$ です．

Proof. まず初めに λ_1 が (6) で定義される場合を考えます．$u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_1))$ に対して Tayler の定理を適用すると $\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)/(1-\alpha)$ は以下のように表されます：

$$\frac{\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)}{1-\alpha} = \frac{(u^{-1})''(\overline{v}_1(\lambda_0))}{2!}\left(\frac{1-\beta}{\beta\lambda_0}\right)^2 \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{Var}[e_0] + o(\Delta_0^3). \tag{12}$$

一方，$u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_E))$ に Tayler の定理を適用すると次のようになります：

$$\begin{aligned} -\overline{\tau}_0 &= -u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_0)) + u^{-1}(\overline{v}_1(\lambda_E)) \\ &= \frac{(u^{-1})'(\overline{v}_1(\lambda_0))}{1!}\Delta_E + \frac{(u^{-1})''(\overline{v}_1(\lambda_0))}{2!}\Delta_E^2 + o(\Delta_E^2), \end{aligned} \tag{13}$$

ここで $\Delta_E = \overline{v}_1(\lambda_E) - \overline{v}_1(\lambda_0)$ です．(13) の右側の第一項が正であるため，(13) の右側の第二項が (12) の右側の第一項より大きいことを示せれば十分です．しかし系の仮定 (11) より，

$$\Delta_E^2 \geq \frac{(1-\beta)^2}{\lambda_0^2\beta^2}\frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{Var}[e_t]$$

であるので，条件 $\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)/(1-\alpha) \leq -\overline{\tau}_0$ は 2 次の Tayler 近似で成り立つこととなります．λ_1 が (7) で定義される場合は次のようになります：

$$\frac{\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)}{1-\alpha} = \frac{(u^{-1})''(\overline{v}_1(\lambda_0))}{2!}\left(\frac{1-\beta}{\beta\lambda_0}\right)^2 \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathrm{Var}\big[\min\{e_0, \overline{e}_{\lambda_0}\}\big] + o(\overline{\Delta}_0^2).$$

$\mathrm{Var}[\min\{e_0, \overline{e}_{\lambda_0}\}] \leq \mathrm{Var}[e_0]$ より，(11) が $\alpha(\overline{\tau}_1 - \overline{\tau}_0)/(1-\alpha) \leq -\overline{\tau}_0$ となる十分条件であることが示されます． □

不等式 (11) の左辺は「期待所得」と「メカニズム $\mathcal{M}$ で効用制御変数 λ_0 の下で保証される消費水準」との差を線形近似した値です．この不等式は，その長さが「所得分散の加重平均の平方根」より大きいことを意味します．図 1 の中で，$\lambda_0\big(\overline{v}_1(\lambda_E) - \overline{v}_1(\lambda_0)\big)$ が効用関数グラフのどの部分に対応するかを示しています．また，もし自給自足状態のリスクプレミアムが (11) の右辺より高ければ，メカニズム $\mathcal{M}$ における生涯効用 $\overline{v}_1(\lambda_0)$ は自給自足の場合より高くなります．

割引因子が高いほど，あるいは生存確率が高いほど，メカニズム $\mathcal{M}$ の持続可能性のために λ_0 に課される十分条件は緩和されます．さらに，もし $(u^{-1})'''$ が正であれば，不等式 (11) は不必要に厳しい条件となっている可能性があります．

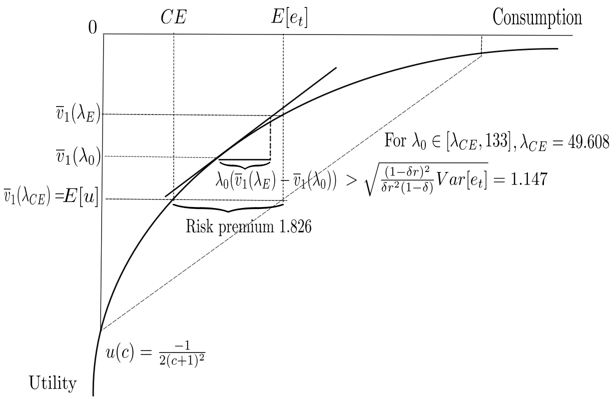

図１　効用関数

注：この図の横軸は消費，縦軸は効用水準を示しています．曲線は効用関数を表します．$\lambda_0\big(\overline{v}_1(\lambda_E) - \overline{v}_1(\lambda_0)\big)$ という長さは，期待所得と，メカニズム $\mathcal{M}$ で効用制御変数 λ_0 のときに保証される消費水準との距離を線形近似したものです．

5　数値例

系 1 に基づくと，次のケースではメカニズム $\mathcal{M}$ は持続可能であり，すべての世代で生涯効用が自給自足状態より高くなります．

効用関数を

$$u(c) = \frac{1}{1+\gamma}(c+1)^{1+\gamma},$$

とします．ここでは $\gamma = -3$ とします．所得の集合は

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

とし，以下ではこの集合を E_s と呼びます．所得の確率分布は

$$\begin{aligned}
P(e_t = 0) &= P(e_t = 9) = 0.025, \\
P(e_t = 1) &= P(e_t = 8) = 0.045781, \\
P(e_t = 2) &= P(e_t = 7) = 0.092762, \\
P(e_t = 3) &= P(e_t = 6) = 0.148524, \\
P(e_t = 4) &= P(e_t = 5) = 0.187933
\end{aligned}$$

とします．以下ではこの分布を P_s と呼ぶことにします．この確率分布は対称で正規分布を近似したものとなっています．

割引因子と生存確率を $r = \alpha = 0.93$ とします．このとき，命題 3 の仮定は

$$\lambda_0 \in [\lambda_{CE}, 133], \qquad \lambda_{CE} = 49.608 = \frac{1}{u'\big(E[u(e_t)]\big)}$$

に対して満たされます．なお，$\lambda_E = 166.375$，リスクプレミアムは 1.826,

$$\sqrt{\frac{(1-\alpha r)^2}{\alpha r^2(1-\alpha)}\mathrm{Var}[e_t]} = 1.147$$

です．

図 2 は，上記の設定で同一世代 1000 人を対象に 100 期間にわたって計算した生涯効用の標本平均の系列と，それに対応する平均所得移転額 (政府側の所得) の系列を示しています．効用制御変数の初期値は $\lambda_0 = 50$ としました．

命題 2 が示すように，平均生涯効用の系列は負の無限大へ発散する，いわゆる困窮化（immiserization）には陥りません．一方，補題 2 が示すとおり，対応する平均所得移転額 (政府側の所得) の系列 $\{-\overline{\tau}_n\}_{n=0}^{100}$ は単調減少します．

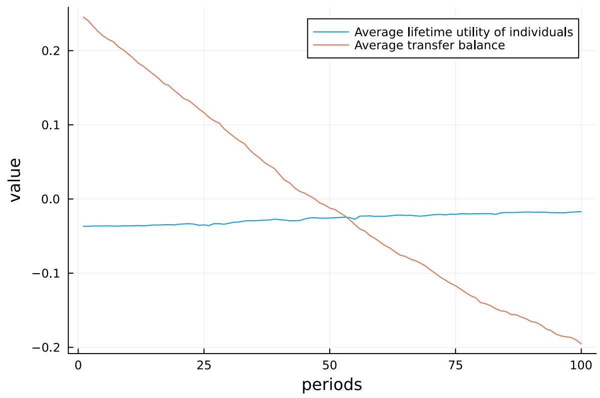

図 2　生涯効用の標本平均の系列と対応する平均所得移転額

注：この図は同一世代 1000 人の個人が効用 $u(c) = (c+1)^{1+\gamma}/(1+\gamma)$（$\gamma = -3$）を持つ場合について，100 期間にわたる生涯効用の標本平均と対応する移転残高の系列を計算したものです．パラメータは，効用制御変数の初期値 $\lambda_0 = 50$，割引因子 $r = 0.93$，生存確率 $\alpha = 0.93$ と設定しています．所得の集合 E には E_s を用い，乱数は離散確率分布 P_s に従って生成しています．

図 3 は 100 人の定常人口社会についての 1000 期間にわたる政府収支の系列 $\{g(n, \lambda_0)\}_{n=0}^{1000}$ を示しています．この社会では各個人が次期に生存している確率が $\alpha = 0.93$ で，新生児が流入することにより総人口 100 人が維持されます．図 2 と同様に，各個人の効用は $u(c) = (c+1)^{1+\gamma}/(1+\gamma)$（$\gamma = -3$）であり，パラメータは効用制御変数の初期値 $\lambda_0 = 50$ と割引因子 $r = 0.93$ です．所得の集合 E は E_s を用い，乱数は同じ対称分布 P_s に従って生成しています．

政府収支の系列 $\{g(n, \lambda_0)\}_{n=0}^{1000}$ は非負のまま推移しており，命題 3 を裏づけています．

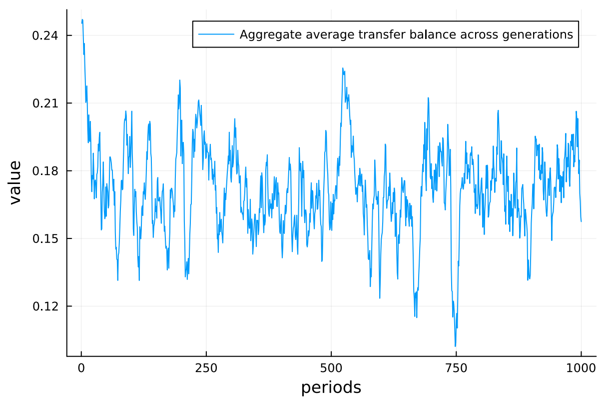

図 3　政府収支の系列 $\{g(t, \lambda_0)\}$

注：この図は 100 人の定常人口社会の 1000 期間にわたる政府収支の系列を示しています．図 2 と同様に，各個人の効用関数は $u(c) = (c+1)^{1+\gamma}/(1+\gamma)$ であり，パラメータは $\gamma = -3$，効用制御変数の初期値 $\lambda_0 = 50$，割引因子 $r = 0.93$，生存確率 $\alpha = 0.93$ です．所得の集合には E_s を用い，乱数は離散確率分布 P_s に従って生成しています．

先行研究で観察された困窮化 (e.g. Green 1987, Thomas and Worrall 1990) は，「期内でリスク

を個人間に割り当てる」というアプローチに起因します．正直な申告を確保するために，申告所得に基づいて優先順位付けされた生涯効用順位を約束することでインセンティブを創出します．本研究においても状態変数 λ を介して収入報告に基づいて時期の生涯効用の値が決まります．しかし，これは今期の個人の貸借残高を時期に精算処理しているに過ぎません．さらに，メカニズム $\mathcal{M}$ で今期に実現する収入 e_t は次期の消費を決定します．ある期間 t において消費は確率 1 で $u^{-1}(\lambda_{t+1}^{-1})$ となります．これは先行研究に見られない性質で，本研究ではこの性質を「リスクの未来への移転」と呼びます．

ただし提案するメカニズムにも制約があります．各世代の平均移転残高が減少系列になるため，政府の収支が負の無限大へと発散するおそれがある点です．しかし出生直後の数期間で平均移転額がマイナス (税金に相当) になるように初期効用制御変数を適切に設定すれば，この問題は回避できます．世代間協力をこの意味で適切に統制すれば，所得が個人の私的情報であっても効率的な所得配分は持続可能になりえます．

メカニズム $\mathcal{M}$ のこの性質は，Marcet and Marimon (1992) の数値結果とは対照的です．同論文では，エージェント 1（マネージャー）の生涯効用が，自給自足する方がエージェント 2（投資家）とインセンティブ契約する時より高くなると報告されています．その主な理由として，第一に Marcet and Marimon (1992) では投資リターンがインセンティブであり，最適水準の投資選択で資本と将来消費を増やせる仮定を置いている点が挙げられます．第二に，同論文のインセンティブ契約は競争的ではないため，結果的にエージェント 1 の投資リターン取り分を減少させてしまう点が関係していると考えられます．

6　各世代に対するメカニズムの最適性の確認

最後にメカニズム $\mathcal{M}$ をベルマン方程式で表現します．ここでは補題 1 の不等式 (9) が成立する場合だけ取り扱います．

まず，価値関数 $V:\mathbb{R}_{++}\times(\mathbb{N}\cup\{0\})\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ を効用制御変数列 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ に対して

$$V(\lambda_t,t)=\mathbb{E}_t\big[u\big(e_t+\tau^*(e_t\mid\lambda_t)\big)\big] \tag{14}$$

と仮定します．次に，この関数が以下のベルマン方程式を満たすかを検証します：

$$V(\lambda_t,t)=\sup_{\tau\in\Lambda(\lambda_t)}\big\{(1-\beta)\,u\big(e_t+\tau(e_t\mid\lambda_t)\big)+\beta\,\mathbb{E}_t[V(\lambda_{t+1},t+1)]\big\}, \tag{15}$$

ここで $\Lambda(\lambda_t)$ は誘引整合性制約と生涯効用水準の保証を約束する制約を満たすコントロール τ の集合であり，状態変数の更新を表す関数 f を $f\big(\lambda_t,\tau(\cdot\mid\lambda_t),t\big)=\lambda_{t+1}$ と定義します．

次の命題が成り立ちます．

命題 4. 効用制御変数列 $\{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ が不等式 (9) を満たしているならば，関数 V はベルマン方程式 (15) を満たし，動的最適化問題の価値関数となります．このとき，制御関数 τ^* は (2) の J を最大化します．

関数 V がベルマン方程式の価値関数になるための十分条件は，Wiszniewska-Matyszkiel (2011) によれば，ベルマン方程式を満たすことに加えて以下のターミナル条件を満たすことです．

ターミナル条件 (Wiszniewska-Matyszkiel 2011)

(i) メカニズム $\mathcal{M}$ における任意の $\lambda_t \in \{\lambda_t\}_{t\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ について

$$\lim_{t\to\infty} V(\lambda_t, t)\beta^t \leq 0.$$

(ii) もし (i) の極限が負であるならば，すなわち $\lim_{t\to\infty} V(\lambda_t, t)\beta^t < 0$ となる場合には，t 期を初期条件とする λ_t に対応する $\hat{\tau}$ の全てについて

$$J(\lambda_t, t, \hat{\tau}) = -\infty.$$

Proof. まず，不等式 (9) が成立している場合には，(14) で定義した V がベルマン方程式 (15) を満たすことを確認します．定義より τ^* について $u(e_t + \tau^*(e_t \mid \lambda_t)) = \overline{v}_1(\lambda_t)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
V(\lambda_t, t) &= \mathbb{E}_t\big[u(e_t + \tau^*(e_t|\lambda_t))\big] \\
&= (1-\beta)u(e_t + \tau^*(e_t|\lambda_t)) + \beta\mathbb{E}_t\big[\overline{v}_1(\lambda_{t+1}(e_t|\lambda_t))\big] \\
&= (1-\beta)u(e_t + \tau^*(e_t|\lambda_t)) + \beta\mathbb{E}_t\big[\mathbb{E}_{t+1}\big[\overline{v}_1(\lambda_{t+1}(e_t|\lambda_t))\big]\big] \\
&= (1-\beta)u(e_t + \tau^*(e_t|\lambda_t)) + \beta\mathbb{E}_t[V(\lambda_{t+1}, t+1)].
\end{aligned} \tag{16}$$

さらに，τ^* はつぎの問題

$$\sup_{\tau\in\Lambda(\lambda_t)} \big\{(1-\beta)u(e_t + \tau(e_t \mid \lambda_t)) + \beta\,\mathbb{E}_t[V(\lambda_{t+1}, t+1)]\big\} \tag{17}$$

の解となります．実際，t 期の情報が与えられたもとで (17) の目的関数の非積分関数に λ_t を掛けると

$$\begin{aligned}
&\lambda_t\big[(1-\beta)u(e_t + \tau(e_t|\lambda_t)) + \beta\overline{v}_1(\lambda_{t+1}(e_t|\lambda_t))\big] \\
&\qquad = \lambda_t\big[(1-\beta)u(e_t + \tau(e_t|\lambda_t)) + \beta\overline{v}_1(\lambda_t)\big] + v_2(\lambda_t, e_t) - \overline{v}_2(\lambda_t)
\end{aligned}$$

となり，最後の項を最大化するのが τ^* であることが分かります．したがって (16) は

$$V(\lambda_t, t) = \sup_{\tau\in\Lambda(\lambda_t)} \big\{(1-\beta)u(e_t + \tau(e_t \mid \lambda_t)) + \beta\,\mathbb{E}_t[V(\lambda_{t+1}, t+1)]\big\}$$

と書けて，目的の結果が得られます．

残る作業はターミナル条件の確認です．効用関数 u が上に有界であるため，

$$\lim_{t\to\infty} V(\lambda_t, t)\beta^t = 0$$

が成り立ちます．よって V はターミナル条件 (i) を満たします．Wiszniewska-Matyszkiel (2011) の定理 1 により，(14) で定義した V はベルマン方程式 (15) の価値関数であり，制御関数 τ^* は (2) における J を最大化します． □

7　結論

本稿は，従来研究が示してきた悲観的な予測「無限に生存する個人の所得が他者から観察不可能な場合，効率的な資源配分は恒常的な不平等と引き換えにしか実現できず，社会全体が困窮化へ向かう」を回避する代替策を提示しました．提案したメカニズムは，リスクを将来に繰り延べることで期内の完全保険を実現します．このとき生涯効用を高める機会の平等を犠牲にする必要はなく，さらに世代間の協力が適切に組織されれば，このメカニズムは長期的にも維持可能です．本研究の結果は「平等な機会を提供する持続可能な社会」における効率的資源配分の在り方に新たな示唆を与えるものです．

参考文献

Andrew Atkeson and Robert E. Lucas. On efficient distribution with private information. *Review of Economic Studies*, 59(3):427–453, 1992.

Vinicius Carrasco, William Fuchs, and Satoshi Fukuda. From equals to despots: The dynamics of repeated decision making in partnerships with private information. *Journal of Economic Theory*, 182:402–432, 2019.

Takako Fujiwara-Greve and Masahiro Okuno-Fujiwara. Voluntarily separable repeated prisoner's dilemma. *The Review of Economic Studies*, 76(3):993–1021, 2009.

Edward J. Green. Lending and the smoothing of uninsurable income. In Edward C. Prescott and Neil Wallace, editors, *Contractual Arrangement for Intertemporal Trade*, volume 1 of *Minnesota Studies in Macroeconomics*. University of Minnesota Press, Minneapolis, 1987.

Albert Marcet and Ramon Marimon. Communication, commitment, and growth. *Journal of Economic Theory*, 58(2):219–249, 1992.

Christopher Phelan. On the long run implications of repeated moral hazard. *Journal of Economic Theory*, 79(2):174–191, 1998.

Jonathan Thomas and Tim Worrall. Income fluctuation and asymmetric information: An example of repeated principal-agent problem. *Journal of Economic Theory*, 51(2):367–390, 1990.

Agnieszka Wiszniewska-Matyszkiel. On the terminal condition for the bellman equation for dynamic optimization with an infinite horizon. *Applied Mathematics Letters*, 24(6):943–949, 2011.